Windomの解答速報 東京慈恵会医科大学 数学

1. (1) 積が偶数の確率 $\frac{3}{4}$

(Aとかく)

積が奇数の確率 $\frac{1}{4}$ (Bとかく)

$x_1=2$ は $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{ア}}$

$x_3=3$ かつ $x_4=5$ は

BBBAと出すので $\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{256}$ $\boxed{\text{イ}}$

Pが4以上に達するまでに投げる回数Xとする

X=2の確率 $P_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

X=4の確率は3回Bを出せば4回目はA, Bどちらでもよいので $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}=P_4$

X=3の確率は上の余事象より $P_3=1-P_2-P_4=\frac{27}{64}$

よって期待値Eは

$$E=2\times\frac{9}{16}+3\times\frac{27}{64}+4\times\frac{1}{64}$$

$$=\frac{157}{64}$$ $\boxed{\text{ウ}}$

(2)

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=1^2 \longleftrightarrow$

$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1$

ここで $|\overrightarrow{OA}|=1$ より

$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=0$ ―①

$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=1^2 \longleftrightarrow$

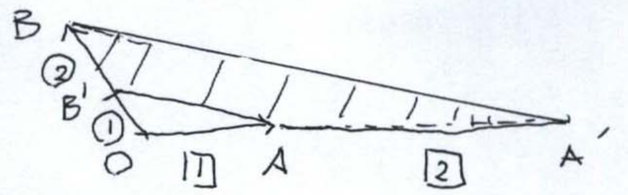
$4|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1 \longleftrightarrow$

$4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=-3$ ―②

①②より $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$ $\boxed{\text{エ}}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{3}{2}$

$1\leqq s+3t\leqq 3$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ のとき $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の範囲は



(A'は OA:AA'=1:2 の点
B'は OB':B'B=1:2 の点)

上図の斜線部より面積は

$\frac{8}{3}\times\triangle OAB=$

$\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2, (1) $C_1 : y = 2x\sqrt{1-x^2} = f(x)$

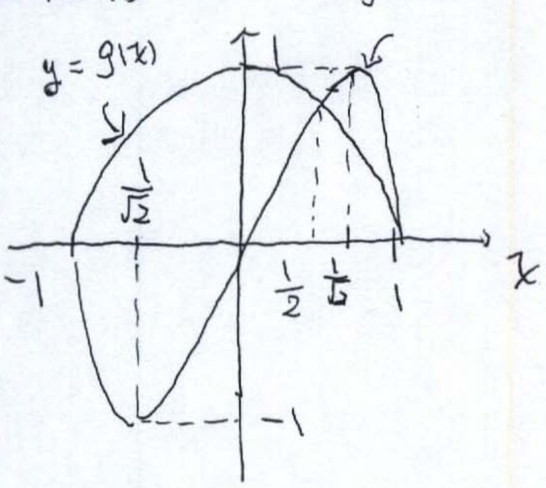
$C_2 : y = \sqrt{1-x^2} = g(x)$

(C_2は円の一部)

$f'(x) = 2\dfrac{(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ より

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

より図は



C_1. C_2の交点は

$2x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} \longleftrightarrow$

$(2x-1)\sqrt{1-x^2} = 0 \longleftrightarrow$

$x = \pm 1,\ \frac{1}{2}$ //

(2) $f'(t) = g'(t) \longleftrightarrow$

$2\left(\dfrac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \longleftrightarrow$

$4t^2 - t - 2 = 0$ の解は

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$ // $\beta = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$ //

(3) (i)

$l_t : y = 2\left(\dfrac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)x + \dfrac{2t^3}{\sqrt{1-t^2}}$

$m_t : y = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

より xを消去すると

$$y = \frac{2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{-4t^2+t+2}$$

$y > 0 \longleftrightarrow -4t^2 + t + 2 > 0 \longleftrightarrow$

$\alpha < t < \beta$ //

$y = h(t)$ とすると

$$h'(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}\,(2t^2+1)(2t-1)}{(-4t^2+t+2)^2}$$

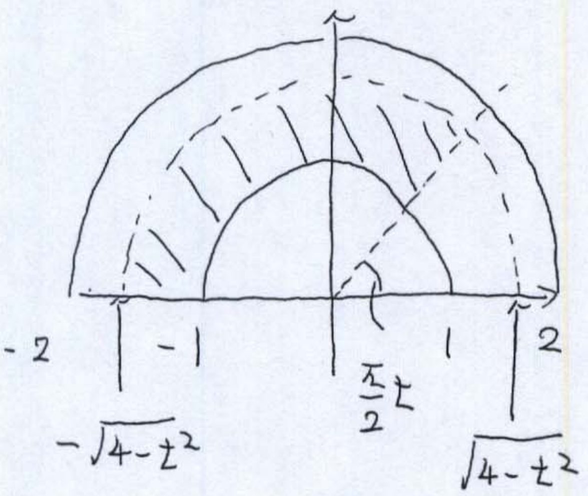
t	α		$\frac{1}{2}$		β
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘		↗	

yの最小は $t = \frac{1}{2}$ のとき $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ //

3(1) $z=t$ のときの B の切り口は

$x^2+y^2 \leqq 4-t^2$ より 半径 $\sqrt{4-t^2}$

(2) L を $z=t$ で切った切り口は



上図。この面積は

$\frac{1}{2}(4-t^2)\left(\pi-\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}t\right)$

$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}t^3-t^2-\frac{3}{2}t+3\right)$

ここで共通部分が存在する

tの範囲は $0\leqq t\leqq\sqrt{3}$

よって体積は

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}t^3-t^2-\frac{3}{2}t+3\right)dt$

$=\sqrt{3}\pi-\frac{9}{16}$

4.(1) ℓ が $x=0$ とすると m は $x=0$ で

ある ℓ 上の点 $(0, t)$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ dt \end{pmatrix}$$ より

すべての t で $x=0$ 上の点に

乗らないので $\ell: x=0$ とはならない

$\ell: y=\alpha x$ とすると $m: y=-\frac{1}{\alpha}x$

ℓ 上の点 $(t, \alpha t)$ は

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at-\alpha t \\ d\alpha t \end{pmatrix}$$ が

m 上の点より $d\alpha t = -\frac{1}{\alpha}(a-\alpha)t$

がすべての t で成立するには

$d\alpha = -\frac{1}{\alpha}(a-\alpha) \Longleftrightarrow$

$d\alpha^2 - \alpha + a = 0$ となる α の

解が1つとなるには $(-1)^2 - 4ad = 0$

$\Longleftrightarrow ad = \frac{1}{4}$ でそのとき $\alpha = \frac{1}{2d}$

(2) $y = \frac{1}{2d}x$ 上の点Pで $OP=1$ と

なる点 P は $P\left(\frac{2d}{\sqrt{4d^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4d^2+1}}\right)$ より

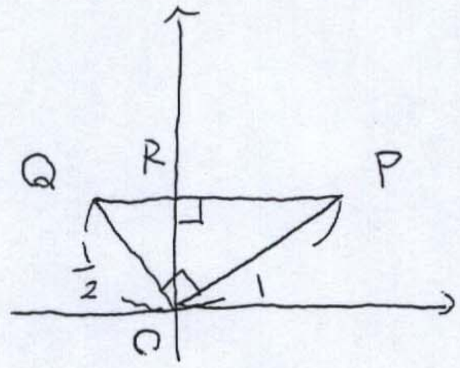
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4d} & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2d}{\sqrt{4d^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{4d^2+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{1+4d^2}} \\ \frac{d}{\sqrt{1+4d^2}} \end{pmatrix}$$

が点 Q となる

$$OQ^2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{1+4d^2}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{1+4d^2}}\right)^2$$

$= \frac{1}{4} \Longleftrightarrow OQ = \frac{1}{2}$

ORが最小のときは下図のとき。



$QP = \frac{\sqrt{5}}{2}$ より $QR = X$, $OR = Y$

$(X>0, Y>0)$ とすると

$$\left.\begin{aligned} X^2+Y^2 &= \frac{1}{4} \\ \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-X\right)^2+Y^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad X = \frac{\sqrt{5}}{10},\ Y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

より ℓ の傾きは

$$\frac{OR}{PR} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{2}$$

(1) より ℓ の傾きは $\frac{1}{2d}$ より

$d=1$ 　 $a = \frac{1}{4d} = \frac{1}{4}$

講評　小問集合が少なくなり大問が1つ増えた．その分大問の難易度は易化したように思われる．

1　(1) 確率．点移動の問題．基本的だが4以上進むという点には注意が必要

(2) ベクトル．ベクトルが表示する領域の面積の問題

教科書レベル

2　2曲線に関する微分法の問題．

曲線のグラフをかかせる及び接線に関する問題であるが，計算ミスをしなければ確実に最後まで行ける．標準レベル．

3　断面積から体積を求める問題．

昨年の問題に比べればびっくりするほどかんたんな問題．$z=t$の所の断面積をきちんとかくことができるかどうか．また$z=\sqrt{3}$で共通部分がなくなることに注意が必要．基本的．

4　一次変換の問題．

設定がわかりにくいが「直線が直線にうつる」は定版問題．後半は$1:2:\sqrt{5}$の直角三角形が見えれば楽勝だろう．

難問と呼ばれる問題はないがあいかわらず時間はかかる．見直す時間はないだろうで80%ぐらいが正規合格のボーダーと思われる．