Windomの解答速報 杏林大学(医) 数学

Ⅰ

ア 1	イ 3	ウ 1	エ 3	オ 2
カ 1	キ 3	ク 4	ケ −	コ 2
サ −	シ 1	ス 5	セ 1	ソ 2
タ 2	チ 5	ツ 5		

Ⅱ

ア 9	イ 9	ウ 2	エ 2	オ 2
カ 3	キ 2	ク 7	ケ 4	コ 3
サ 1	シ 2	ス 3	セ 2	ソ 3
タ 3	チ 9	ツ 4	テ 3	ト 3
ナ 1	ニ 2			

Ⅲ

ア 1	イ 3	ウ 1	エ 6	オ 5
カ 6	キ 2	ク −	ケ 1	コ 7
サ 6	シ −	ス 3	セ 1	ソ 2

Ⅳ

ア 3	イ −	ウ 2	エ 1	オ 1
カ 0	キ 0	ク 0	ケ 2	コ −
サ 1	シ 3	ス 1	セ 2	ソ 1
タ 0	チ 2	ツ 2	テ 1	ト 1
ナ 6				

講評

Ⅰ

楕円の定義式，値域，焦点等の基本事項，及び楕円と共有点を持つ条件，不等式の問題。

Ⅱ

三角関数と一次変換，極座標の融合問題で図形的に処理する問題。

Ⅲ

定数型の積分方程式と接線，面積を求める問題で定形的。

Ⅳ

数列漸化式と行列のn乗計算を組み合わせた問題で 09 年にも同様の出題がある。

Ⅰ，Ⅲは取り組みやすく，Ⅱ，Ⅳ特にⅣは時間内に最後まで解くのは難しい。

Ⅰ，Ⅲを確実に得点し，Ⅱ，Ⅳの前半部分を集めて，60%位は欲しい。

2013年　杏林大学 医学部　数学　解答

I

$y=2\sqrt{-x^2+4x-3}+1$ ------①

(a) $-x^2+4x-3\geqq 0$ より

$x^2-4x+3\leqq 0$

$1\leqq x\leqq 3$

また ①は $y=2\sqrt{-(x-2)^2+1}+1$

$0\leqq$ 根号内 $\leqq 1$ より

$1\leqq y\leqq 3$

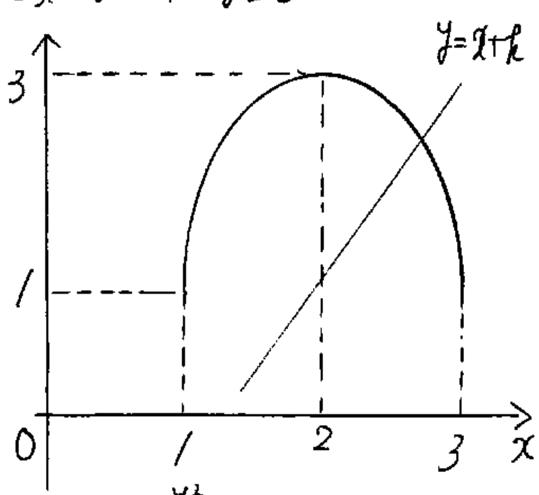
(b) ①より $y-1=2\sqrt{-(x-2)^2+1}$

両辺を平方して

$(y-1)^2=4\{-(x-2)^2+1\}$

$(x-2)^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ ------ (※)

ただし $1\leqq x\leqq 3$　$1\leqq y\leqq 3$



(※)の標準形 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点は

$(0,\ \pm\sqrt{3})$

従って (※) の焦点は $(2,\ 1\pm\sqrt{3})$

楕円の定義から　$PA+PB=4$

（長軸の長さ）

(c) $y=x+k$ ---②

②が $(3,1)$ を通るとき，$k=-2$

②と(※)が接するのは ②を(※)へ代入して

$4(x-2)^2+(x+k-1)^2=4$

$5x^2+2(k-9)x+k^2-2k+13=0$

接するとき 判別式$=0$ だから

$D/4=(k-9)^2-5(k^2-2k+13)=0$

$k^2+2k-4=0$

図から　$k=-1+\sqrt{5}$

従って ②が ①と共有点を持つのは

$-2\leqq k\leqq -1+\sqrt{5}$

(d) $x-1\leqq 2\sqrt{-x^2+4x-3}+1$

$x-2\leqq 2\sqrt{-x^2+4x-3}$ ----- (#)

(i) $x-2\leqq 0$ なら (#)は 成立

(ii) $x-2\geqq 0$ なら (#) の両辺を平方して

$x^2-4x+4\leqq 4(-x^2+4x-3)$

$5x^2-20x+16\leqq 0$

$2-\frac{2}{5}\sqrt{5}\leqq x\leqq 2+\frac{2}{5}\sqrt{5}$

$x\geqq 2$とあわせて　$2\leqq x\leqq 2+\frac{2}{5}\sqrt{5}$

(i) または (ii) かつ $1\leqq x\leqq 3$ だから

求める範囲は　$1\leqq x\leqq 2+\frac{2}{5}\sqrt{5}$

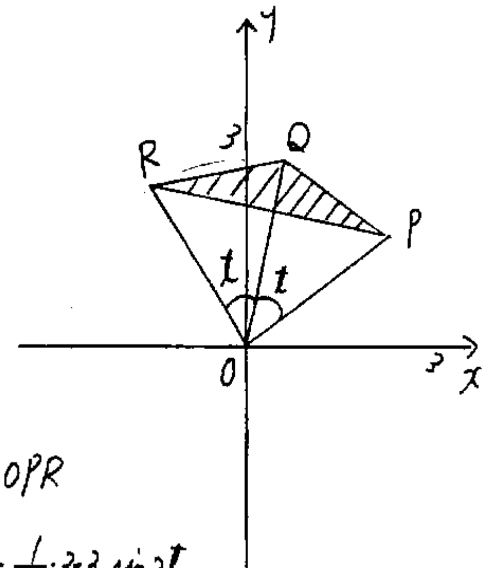
II

$0<t<\pi$

$P(3\cos t,\ 3\sin t)$

$Q(3\cos 2t,\ 3\sin 2t)$

$R(3\cos 3t,\ 3\sin 3t)$



(a)

$S=\triangle OPQ+\triangle OQR-\triangle OPR$

$=(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin t)\times 2-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin 2t$

$=9\sin t-\frac{9}{2}\sin 2t$

$\dfrac{dS}{dt}=9\cos t-9\cos 2t=9(1-\cos t)(1+2\cos t)$

$\cos t=-\frac{1}{2}\Longrightarrow t=\frac{2}{3}\pi$で 極大かつ最大

最大値は　$S(t=\frac{2}{3}\pi)=9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$

(b) $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{3}{2}t & \sin\frac{3}{2}t\\ -\sin\frac{3}{2}t & \cos\frac{3}{2}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{3}{2}t) & -\sin(-\frac{3}{2}t)\\ \sin(-\frac{3}{2}t) & \cos(-\frac{3}{2}t)\end{pmatrix}$

行列Aは 原点回りに $-\frac{3}{2}t$だけ回転する行列

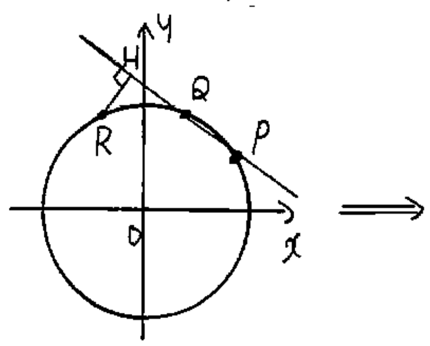


図1

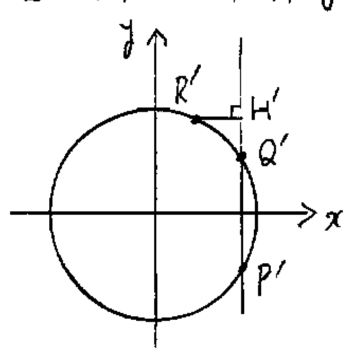


図2

図1を 原点回りに $-\frac{3}{2}t$ だけ回転する(図2)

各点を 図2の様に取る

$P'(3\cos(-\frac{t}{2}), 3\sin(-\frac{t}{2}))$　$Q'(3\cos\frac{t}{2}, 3\sin\frac{t}{2})$

$R'(3\cos\frac{3}{2}t, 3\sin\frac{3}{2}t)$

従って　Hを移動したH'は

$H'(3\cos\frac{1}{2}t, 3\sin\frac{3}{2}t)$

$OH^2 = OH'^2$

$= 9(\cos\frac{1}{2}t)^2 + 9\sin^2\frac{3}{2}t$

$= 9\left(\frac{1+\cos t}{2} + \frac{1-\cos 3t}{2}\right)$

$= 9 + \frac{9}{2}(\cos t - \cos 3t)$

ここで　$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ で

$\cos t = u$ とおき、$\cos t - \cos 3t = f(u)$ とすると

$f(u) = u - (4u^3 - 3u) = -4u^3 + 4u$

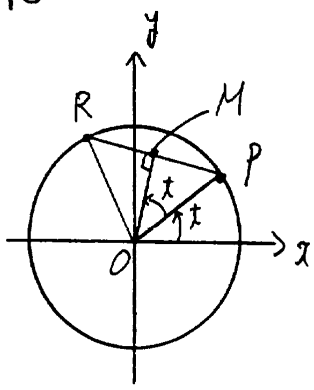
$f'(u) = -12u^2 + 4 = -12(u + \frac{\sqrt{3}}{3})(u - \frac{\sqrt{3}}{3})$

$u = \cos t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ で極大かつ最大

最大値は

$9 + \frac{9}{2}f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 9 + 4\sqrt{3}$

(c) 中点を$M(x, y)$とすると



$x = \frac{3}{2}(\cos t + \cos 3t)$

$y = \frac{3}{2}(\sin t + \sin 3t)$

$\cos 3t + \cos t = 2\cos 2t\cos t$

$\sin 3t + \sin t = 2\sin 2t\cos t$

従って　$x = 3\cos t\cos 2t$

$y = 3\cos t\sin 2t$

$M(r, \theta)$とすると　$2t = \theta$ だから

$r = 3\cos t = 3\cos\frac{1}{2}\theta$

III

(a) $\int_1^e \frac{(\log t)^2}{t}dt = \left[\frac{1}{3}(\log t)^3\right]_1^e = \frac{1}{3}$

次に　$\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt = A$（定数）とおくと

$f(x) = (\log x)^2 - A$

このとき

$A = \int_1^e \frac{1}{t}\{(\log t)^2 - A\}dt$

$= \int_1^e \frac{(\log t)^2}{t}dt - A\int_1^e \frac{1}{t}dt$

$= \frac{1}{3} - A[\log t]_1^e = \frac{1}{3} - A$

つまり　$A = \frac{1}{3} - A \Longrightarrow A = \frac{1}{6}$

従って　$f(x) = (\log x)^2 - \frac{1}{6}$

また、$f'(x) = \frac{2\log x}{x}$

$f''(x) = 2\,\frac{1 - \log x}{x^2}$ だから

$x = e$ で $f''(x) = 0$ となり　$x = e$ の前後で

$f''(x)$ は符号は ⊖ ⟶ ⊕ へ変化するから

$x = e$ が変曲点のx座標

y座標は　$f(e) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(b)　$(e, \frac{5}{6})$ における接線は

$y - \frac{5}{6} = \frac{2}{e}(x - e)$

$y = 2e^{-1}x - \frac{7}{6}$

また

$S = \int_1^e \left[\{(\log x)^2 - \frac{1}{6}\} - (\frac{2}{e}x - \frac{7}{6})\right]dx$

$= \int_1^e \{(\log x)^2 - \frac{2}{e}x + 1\}dx$

$= \left[x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} - \frac{1}{e}x^2 + x\right]_1^e$

$= (e-2) - \frac{1}{e}(e^2 - 1) + (e - 1)$

$= -3 + \frac{1}{e}(1 + e^2)$

IV

(a)　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n\log_2\frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a\cdot a_{n+1} + b\cdot a_n + 2^n\log_2\frac{(n+1)^2}{n} \\ c\,a_{n+1} \end{pmatrix}$

(*)と比較して　$a = 3,\ b = -2$　, また $c = 1$

従って　$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

次に A^{-1} を左から n 回掛けて

$$(A^{-1})^n \overrightarrow{b_{n+1}} = (A^{-1})^{n-1}\overrightarrow{b_n} + (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A^{-1})^{n-1}\overrightarrow{b_n}$ は 階差数列 だから

$$(A^{-1})^{n-1}\overrightarrow{b_n} = \overrightarrow{b_1} + \sum_{k=1}^{n-1}(A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix}$$

------(※※)

(b) $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と おくと

$A^{-1} = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$ だから

$A^{-1}P = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = 1$

従って $A^{-1} = P\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ ---(ヌ)

(ヌ) より $P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(P^{-1}A^{-1}P)^k = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}(A^{-1})^k P = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow (A^{-1})^k = P\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= P\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & -(\frac{1}{2})^k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

これから (※※)の 右辺の和の 項について

$$\sum_{k=1}^{n-1}(A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} P \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & -(\frac{1}{2})^k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} P \begin{pmatrix} \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ -2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \end{pmatrix}$$ ---- (#)

ここで $\sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \frac{(k+1)^2}{k}$

$= \log_2 \frac{2^2}{1} + \log_2 \frac{3^2}{2} + \text{-----} + \log_2 \frac{n^2}{n-1}$

$= \log_2 \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot \text{------} \cdot n^2}{1 \cdot 2 \cdot \text{------} (n-1)}$

$= \log_2 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{------} \cdot (n-1)\, n^2$

$= \log_2 n \times n!$

$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \{2\log_2(k+1) - \log_2 k\}$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \{2^{k+1}\log_2(k+1) - 2^k \log_2 k\}$

$= (2^2 \log_2 2 - 2\log_2 1)$

$+ (2^3 \log_2 3 - 2^2 \log_2 2)$

$+ (2^4 \log_2 4 - 2^3 \log_2 3)$

$\vdots$

$+ \{2^n \log_2 n - 2^{n-1}\log_2 (n-1)\}$

$= 2^n \log_2 n - 2\log_2 1$

$= 2^n \log_2 n$

従って

$(\#) = P\begin{pmatrix} \log_2 n \times n! \\ -2^n \log_2 n \end{pmatrix}$

(c) また $A = P\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}P^{-1}$ とおく

$AP = P\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & t \\ s & t \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow s = 2,\ t = 1$

従って $A = P\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ より

$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A^n = P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2^{n+1} & 1\\ 2^n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & -2^{n+1}+2\\ 2^n-1 & -2^n+2\end{pmatrix}$$

これから

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix}2^n-1 & -2^n+2\\ 2^{n-1}-1 & -2^{n-1}+2\end{pmatrix}$$

(※※)に A^{n-1} を左から掛けて

$$\vec{b_n} = A^{n-1}P\begin{pmatrix}\log_2 n! \times n\\ -2^n\log_2 n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2^n-1 & -2^n+2\\ 2^{n-1}-1 & -2^{n-1}+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log_2 n! \times n\\ -2^n\log_2 n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2^n & 1\\ 2^{n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log_2 n! \times n\\ -2^n\log_2 n\end{pmatrix}$$

これから

$$a_n = 2^{n-1}\log_2 n! \times n - 2^n\log_2 n$$

$$= 2^{n-1}\log_2 n! + 2^{n-1}\log_2 n - 2^n\log_2 n$$

$$= 2^{n-1}\log_2 n! - 2^{n-1}\log_2 n$$

$$= 2^{n-1}\log_2 \frac{n!}{n}$$

$$= 2^{n-1}\log_2 (n-1)!$$