Windom 2013年2月8日 日本大学(医学部)
数学解答速報 得点率75%がボーダー

$\boxed{1}$

以下の設問（1）～（8）については，答えだけを解答欄に書きなさい.

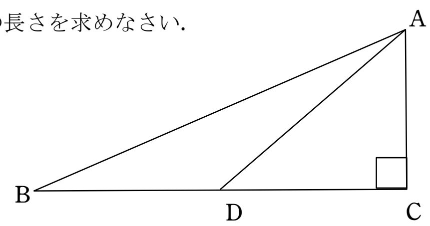
（1）つぎの式を計算して簡単にしなさい。

$$2\times 8^{-\frac{1}{6}}-\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2}+1)^3}+2^{-\frac{5}{2}}\log_2 8$$

（2）aは$a\geqq -3$を満たす定数とする.放物線$y=3x^2$と直線$y=2ax+2a+1$が異なる2点を共有するようなaの値の範囲を求めなさい

（3）xy座標平面上に点$A(0,5)$と点$B(8,2)$をとる.x軸上に点Pを，A,Bからの距離の和$AP+BP$が最少になるようにとるとき，Pのx座標を求めなさい.

（4）$AC=2$，$\angle ABC=30°$，$\angle ACB=90°$の直角三角形ABCにおいて，辺BC上に点Dを$CD=2$となるようにとる.三角形ABDの外接円を描いたとき，AとDを端点とし三角形ADCの内部を通る孤$\overset{\frown}{AD}$の長さを求めなさい.



（5）実数x，yは3つの不等式$y\geqq 2x^2$，$y\leqq 3x+3$，$4x+y\leqq 17$をすべて満たすとする$x+y=k$とおくとき，kのとり得る値の範囲を求めなさい.

（6）原点Oの座標空間に四面体$OABC$があり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする. .線分$OC$の中点を$D$とし，線分$AB$を2:3に内分する点を$E$とする.線分$OE$の延長線上に点$F$を$\overrightarrow{OF}=5\overrightarrow{OE}$を満たすようにとり，$D$と$F$を線分で結ぶとき，$DF$と四面体の底面$ABC$との交点を$G$とする.このとき，$\overrightarrow{OG}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表しなさい.

（7）任意の自然数nとある自然数aについて，$3^{2n}-1=a(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})$が成り立つことに注意すると，$3^{120}+7$は$a$の倍数であることがわかる.このとき$\dfrac{3^{120}+7}{a}$の桁数を求めなさい.ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$とする.

（8）原点Oの座標平面において，双曲線$\dfrac{(x-2\sqrt{2})^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$上の点$P$から直線$x=a$に下した垂線を$PH$とし，$k=\dfrac{PH}{OP}$とおく.点$P$の位置に無関係に$k$の値が一定となるときの$a$の値と，そのときの$k$の値を求めなさい.

(1) $\dfrac{39\sqrt{2}}{8}-5$　(2) $-3+2\sqrt{3}<a$　(3) $\dfrac{40}{7}$　(4) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

(5) $-\dfrac{1}{8}\leqq k\leqq 11$　(6) $\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$　(7) 57桁　(8) $a=2\sqrt{2}$　$k=2\sqrt{3}$

解説

(1)

$$2\times 8^{-\frac{1}{6}}-\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2}+1)^3}+2^{-\frac{5}{2}}\log_2 8=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{8-4(\sqrt{2}-1)^3+3}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{39-20\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{39\sqrt{2}-40}{8}$$
$$=\frac{39\sqrt{2}}{8}-5$$

(2)

$y=3x^2$と$y=2ax+2a+1$を解くと

$3x^2=2ax+2a-1$

$3x^2-2ax-(2a-1)=0$

$\dfrac{D}{4}=a^2+3(2a-1)>0$

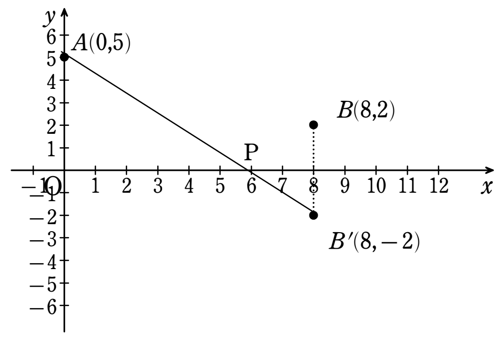
$a^2+6a-3>0$

$a=-3\pm\sqrt{9+3}=-3\pm\sqrt{12}=-3\pm 2\sqrt{3}$ に注意すると

$a<-3-2\sqrt{3}$ または $-3+2\sqrt{3}<a$

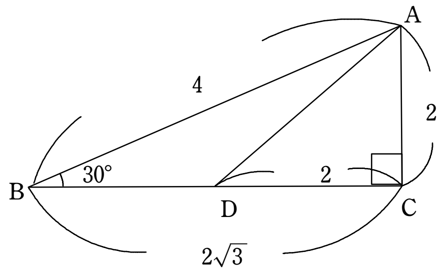
$a\geqq -3$より、$-3+2\sqrt{3}<a$

(3)



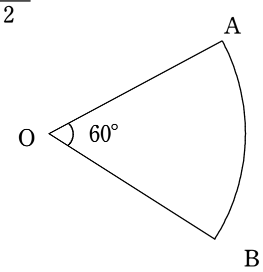
$$8\times\frac{5}{5+2}=\frac{40}{7}$$

(4)

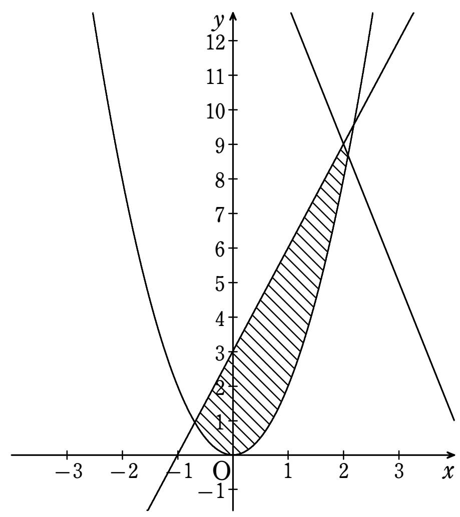


正弦定理より、$2R=\dfrac{4}{\sin 135°}$　$R=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$

$$\overset{\frown}{AD}=2\pi R\times\frac{60°}{360°}$$
$$=2\pi\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$



(5)



$3x+3=-4x+17 \Leftrightarrow 7x=14$

$x=2$　$y=9$　よって(2,9)

kが最大なのは　$(x,y)=(2,9)$の時で　$k=2+9=11$

$y'=4x=-1$　$x=-\dfrac{1}{4}$　このとき　$y=\dfrac{1}{8}$　よって$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$

$y=3x+3\Longrightarrow y=-\dfrac{3}{4}+3=\dfrac{4}{9}>\dfrac{1}{8}$に注意すると

kが最小なのは　$(x,y)=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$で接する時で　$k=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=-\dfrac{1}{8}$

よって範囲は$-\dfrac{1}{8}\leqq k\leqq 11$

(6)

$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{OF}=3\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OG}=t\overrightarrow{OF}+(1-t)\overrightarrow{OD}$

$=3t\vec{a}+2t\vec{b}+\frac{1}{2}(1-t)\vec{c}$

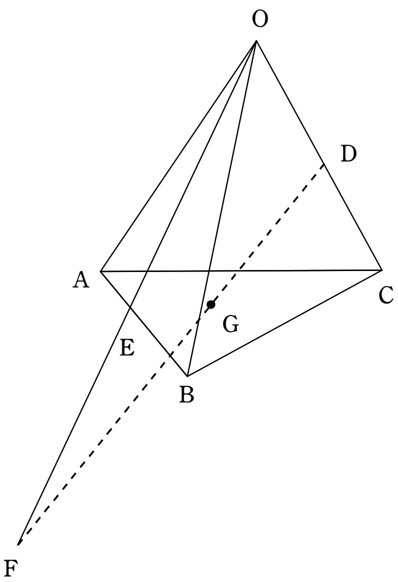
$3t+2t+\frac{1}{2}(1-t)=5t+\frac{1}{2}(1-t)=1$

$10t+1-t=2$

$9t=1$

$t=\frac{1}{9}$

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$



(7)

$3^{2n}-1=9^n-1=(9-1)(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})=8(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})$

より、$a=8$である。

$\frac{3^{120}}{8}<\frac{3^{120}+7}{8}<\frac{3^{121}}{8}\quad \log_{10}\frac{3^{120}}{8}<\log_{10}\frac{3^{120}+7}{8}<\log_{10}\frac{3^{121}}{8}$

$\log_{10}\frac{3^{120}}{8}=120\log_{10}3-3\log_{10}2=120\cdot 0.4771-3\cdot 0.3010=56.349$

$\log_{10}\frac{3^{121}}{8}=121\log_{10}3-3\log_{10}2=121\cdot 0.4771-3\cdot 0.3010=56.8261$

従って　$56<\log_{10}\frac{3^{120}+7}{8}<57$　即ち、$10^{56}<\frac{3^{120}+7}{8}<10^{57}$　ゆえに57桁。

(8)　$\frac{(x-2\sqrt{2})^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1\cdots$①

とおく。①より、双曲線の中心は$(2\sqrt{2},0)$なので、

準線は$x=2\sqrt{2}$となる。よって、$a=2\sqrt{2}$

このとき、中心から焦点までの距離は

$f=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$なので、この双曲線の焦点の座標は

$(2\sqrt{2}\pm 2\sqrt{2},0)$　即ち、$(0,0)$と$(4\sqrt{2},0)$となる。

双曲線上の点を$(0,t)\ (t>0)$とおく。①に代入すると

$\frac{(0-2\sqrt{2})^2}{6}-\frac{t^2}{2}=1$　より、$t=\frac{2}{\sqrt{6}}$となる。

$k=\frac{PH}{OP}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{6}}}=2\sqrt{3}$となる。

$\boxed{2}$

箱の中に，数字-1，1，2がそれぞれ1つずつ書かれた3枚のカードが入っている.異なるカードには異なる数字が書かれている.この箱の中から1枚のカードを取り出し、カードに書かれた数字を記録して箱に戻すことをn回繰り返し行うとする.このとき，記録されたn個の数字の総和をS_nで表す.ただし，1枚のカードを取り出す事象はどれも同様に確からしいとし，(1)，(2)については答えだけを解答欄に書きなさい.

(1)　$n=3$とする.$S_3=2$となる確率を求めなさい.

(2)　$n=6$とする.$S_6=2$となる確率を求めなさい.

(3)　mを自然数とし，$n=6m$かつ$S_n=2$となる場合を考える.-1，1，2が書かれたカードを取り出した回数を，それぞれ，x，y，zで表すときx，y，zがとり得る値の組(x,y,z)はいくつあるか.mを用いた式で答えなさい.

(1)　$\frac{2}{9}$　(2)　$\frac{25}{243}$　(3)　$m+1$

解説

A：-1をとる。$P_A=\frac{1}{3}$

B：1をとる。$P_B=\frac{1}{3}$

C：2をとる。$P_C=\frac{1}{3}$

とおく。

(1)　$S_3=2\Leftrightarrow$ A,B,C　その確率は$3!\cdot P_A\cdot P_B\cdot P_C=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$

(2)　$S_6=2\Leftrightarrow\begin{cases}AABBBB\\AAABCC\end{cases}$

その確率は$\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot {P_A}^2\cdot {P_B}^4+\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot {P_A}^3\cdot P_B\cdot {P_C}^2$

$=15\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6+60\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{25}{243}$

(3)　6回で2進むパターンを

X：AABBBB

Y：AAABCC

とし、6回で0進むパターンを

P：AAABBB

Q：AAAACC

とする。

Xが1回とQが1回だとAAAAAABBBBCCとなり、

Yが1回とPが1回でもAAAAAABBBBCCとなることに注意する。

これに、$m-2$回PまたはQを加えると題意を満たすパターンが作れ、それらのA,B,Cの個数は全て異なる。

付け加え方を吟味すると$(P,Q)=(0,m-2),(1,m-3),\cdots(m-2,0)$の$m-1$通りが作れる。

これ以外にXが1回とPが$m-1$回の時、Yが1回とQが$m-1$回の時があるので、

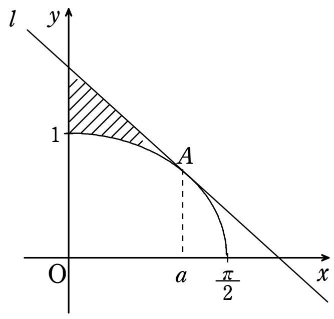
全てで$m-1+2=m+1$通り作れる。

$\boxed{3}$

座標平面上に曲線$y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$を描き、この曲線上に点$A(a,\cos a)$,

$\left(ただし,\ 0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$, をとる.この曲線上の点$A$における接線を$l$とし，曲線と$l$と$y$軸で囲まれる図形（図の斜線部分）の面積を$S(a)$で表す.以下の問いに答えなさい.ただし，(1), (2)については答えだけを解答欄に書きなさい.

(1) $S(a)$を求めなさい.



(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h^2}$を求めなさい.

(3) $h>0$を$0<a-h<\dfrac{\pi}{2}$，$0<a+h<\dfrac{\pi}{2}$を満たすようにとる.つぎの極限値を求めなさい.

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}(S(a+h)+S(a-h)-2S(a))$$

(1) $a\cos a+\dfrac{a^2}{2}\sin a-\sin a$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) $a\cos a-\dfrac{a^2}{2}\sin a$

解説

(1) $f(x)=\cos x$ とおくと、$f'(x)=-\sin x$である。Aにおける接線は

$y-\cos a=-\sin a(x-a)$　より、$y=-\sin a\,x+a\sin a+\cos a$

となる。$P(a,0)$, $Q(0,\ a\sin a+\cos a)$とおくと、台形OPAQの面積は

$\dfrac{a}{2}(\cos a+a\sin a+\cos a)=a\cos a-\dfrac{a^2}{2}\sin a$　となる。よって、

$$S(a)=a\cos a-\frac{a^2}{2}\sin a-\int_0^a\cos x\,dx=a\cos a-\frac{a^2}{2}\sin a-\sin a$$

(2) ロピタルの定理より、$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin h}{2h}=-\frac{1}{2}$

(3) ロピタルの定理より、

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}(S(a+h)+S(a-h)-2S(a))$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{S'(a+h)-S'(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{S''(a+h)+S''(a-h)}{2}=S''(a)$$

$$S'(a)=1\cdot\cos a-a\sin a+a\sin a+\frac{a^2}{2}\cos a-\cos a=\frac{a^2}{2}\cos a$$

$S''(a)=a\cos a-\dfrac{a^2}{2}\sin a$　よって、与式$=a\cos a-\dfrac{a^2}{2}\sin a$

$\boxed{4}$

関数$f(x)=e^{-x-1}$について，以下の問いに答えなさい.ただし，eは自然対数の底を表す.

(1) 方程式$x=f(x)$はただ1つの解をもつことを証明しなさい.

(2) (1)の方程式の解をαで表す.数列$\{a_n\}$を

$a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$　$(n=1,2,3\cdots\cdots)$

により定める.このとき，はさみうちの原理を用いて$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$が成り立つことを証明しなさい.

(1) 略　(2) 略

解説

(1) $F(x)=f(x)-x=e^{-x-1}-x$　とおく

$F'(x)=-e^{-x-1}-1<0$より$F(x)$は実数全体で単調減少。

また、$F(0)=e^{-1}>0$　$F(1)=e^{-2}-1=\dfrac{1-e^2}{e^2}<0$ であるから

$y=f(x)$のグラフはx軸と$0<x<1$の間で一回だけ交わり、他では交わらない。

よって、$f(x)=x$の解はただ一つである。

(2) αは$f(x)=x$の解なので、$f(\alpha)=\alpha$を満たす。

$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha)\cdots$①

であり、$f(x)$は実数全体で連続かつ微分可能であることに注意すると平均値の定理より、

$\dfrac{f(a_n)-f(\alpha)}{a_n-\alpha}=f'(\beta)\cdots$②　（$a_n<\beta<\alpha$ または $\alpha<\beta<a_n$）

を満たすβが少なくとも1つ存在する。

$a_1=1>0$と$a_{n+1}=f(a_n)$より$a_n>0$であり、$\alpha>0$なので、βは少なくとも$\beta>0$を満たす。

ここで、$f'(x)=-e^{-x-1}$は常に負で単調増加なので、

$f'(0)<f'(\beta)<0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{e}<f'(\beta)<0$ 即ち、$|f'(\beta)|<\dfrac{1}{e}\cdots$③

を満たす。①と②と③より、

$$|a_{n+1}-\alpha|=|f(a_n)-f(\alpha)|=|f'(\beta)|\,|a_n-\alpha|<\frac{1}{e}|a_n-\alpha|$$

が成り立つ。ゆえに、

$0\leqq|a_n-\alpha|<|a_1-\alpha|\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}=(1-\alpha)\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$　$\cdots$④

が成立する。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-\alpha)\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}=0$　と④と はさみうちの原理より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$　即ち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

よって、題意成立。