Windom 2013年1月28日 日本医科大学(医学部) 数学解答速報 得点率80%がボーダー

$\boxed{1}$

２つの行列$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a-2 & -1\\ a^2-2a-4 & 2a-6\end{pmatrix}$に対して

以下の各問いに答えよ。解答欄には答えのみを記せ。

問１　行列$A-kE$が逆行列を持たないような定数kの値を求めよ。

　ただし、Eは２次の単位行列を表す。

問２　問１で求めたkの値を小さい順にα,βとするとき、$\alpha P+\beta Q=A$

　$P+Q=E$を満たす行列P,Qを求めよ。

問３　行列の積P^2,Q^2,PQ,QPを求めよ。

問４　行列Aのn乗$A^n(n=1,2,\cdots)$を求めよ。

問５　$a>0$として、行列Cを$C=A+B$と定めるとき、行列$C-kE$が逆行列を

　もたないような定数kの値がただ１つしかないという。このような定数k

　およびaの値を求めよ。

問６　問５で求めたkを用いて、行列Nを$N=C-kE$と定めるとき、N^2を求めよ。

問７　行列Cのn乗$C^n(n=1,2,\cdots)$を求めよ。

問１　$k=3,4$

問２　$P=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$　$Q=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

問３　$P^2=P=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$　$Q^2=Q=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$　$PQ=QP=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

問４　$\begin{pmatrix}3^{n+1}-2\cdot 4^n & -2\cdot 3^n+2\cdot 4^n\\ 3^{n+1}-3\cdot 4^n & -2\cdot 3^n+3\cdot 4^n\end{pmatrix}$

問５　$a=3$　$k=4$

問６　$N^2=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

問７　$C=\begin{pmatrix}(4-2n)\cdot 4^{n-1} & n\cdot 4^{n-1}\\ -n\cdot 4^n & (4+2n)\cdot 4^{n-1}\end{pmatrix}$

解説

$\boxed{2}$

自然数m,nは$2\leqq m<n$を満たすとする。

問１　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}$$

問２　次の不等式が成り立つとを証明せよ。

$$\frac{3}{2}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq 2$$

問３　問２の不等式より精密にした、次の不等式が成り立つとを証明せよ。

$$\frac{29}{18}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq\frac{61}{36}$$

問１　$y=\dfrac{1}{x^2}$のグラフを利用。

問２　$m=2$として問１の不等式を利用

問３　$m=4$として問１の不等式を利用

解説

問１　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$とおく。$f(x)$は$x>0$で常に正であり、単調減少である。

kを２以上の自然数とするとき、

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx<\frac{1}{k^2}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx$$

が成り立つ。

$$\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=m}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow\int_m^{n+1}\frac{1}{x^2}dx<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2}<\int_{m-1}^{n}\frac{1}{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow -\left[\frac{1}{x}\right]_m^{n+1}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2}<-\left[\frac{1}{x}\right]_{m-1}^{n}$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m}\right)<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2}<-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{n+1-m}{m(n+1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}\quad\cdots①$$

問２　①において$m=2$とすると、

$$\frac{n-1}{2(n+1)}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{n-1}{2(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<1+\frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{2(n+1)}\right)=\frac{3}{2}\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)=2$$

より、$\dfrac{3}{2}\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)\leqq 2$

問３　①において$m=4$とすると、

$$\frac{n-3}{4(n+1)}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{n-3}{3n}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{n-3}{4(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{n-3}{3n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{49}{36}+\frac{n-3}{4(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{49}{36}+\frac{n-3}{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{49}{36}+\frac{n-3}{4(n+1)}\right)=\frac{49}{36}+\frac{1}{4}=\frac{49+9}{36}=\frac{29}{18}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{49}{36}+\frac{n-3}{3n}\right)=\frac{49}{36}+\frac{1}{3}=\frac{49+12}{36}=\frac{61}{36}$$

より、$\dfrac{29}{18}\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)\leqq\dfrac{61}{36}$

$\boxed{3}$

次の各問に答えよ。

問１　$x\geqq 1$，$k=0,1,2,\cdots$として

$$I_k(x)=\int\frac{(\log x)^k}{x^2}dx$$

とおくとき、$I_0(x)$を求め，$I_{k+1}(x)$を$I_k(x)$を用いて表せ。

また$I_4(x)$を求めよ。

問２　$x>0$で不等式$\log x\leqq\dfrac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$が成り立つこと証明せよ。

問３　関数$f(x)=\dfrac{(\log x)^2}{x}$に関する以下の問いに答えよ。

(a)　$y=f(x)\ (x\geqq 1)$の極値、極限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$を調べ、増減表を作りグラフの

　概形を描け。解答欄には解答欄には増減表とグラフの概形のみを記せ。

(b)　$n>1$として，$y=f(x)$と$x=n,x=n^2$およびx軸で囲まれる部分D_nの

　面積S_nを求めよ。

(c)　D_nをx軸のまわりに回転して得られる立体の体積V_nを求めよ。

(d)　極限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nV_n}{\log n\,S_n}$の値を求めよ。

問１　$I_0(x)=-\dfrac{1}{x}+C$　$I_{k+1}=-\dfrac{(\log x)^{k+1}}{x}+(k+1)I_k(x)$

$$I_4(x)=-\frac{(\log x)^4+4(\log x)^3+12(\log x)^2+24\log x+24}{x}+C$$

問２　$f(x)=\dfrac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}-\log x$とおき、極小値＝最小値$=f(e^3)=0$を利用。

問３

(a)　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$、$x=e^2$で極大値$\dfrac{4}{e^2}$をとる。(図は略)

(b)　$\dfrac{7}{3}(\log n)^3$

(c)　$\pi\left\{\dfrac{L^4+4L^3+12L^2+24L+24}{n}-\dfrac{16L^4+24L^3+48L^2+48L+24}{n^2}\right\}$ $(L=\log n)$

(d)　$\dfrac{3}{7}\pi$

解説