Windom 2013年3月2日 昭和大学II期(医学部) 数学解答速報 得点率80％がボーダー

$\boxed{1}$

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{3}$とする。$\sin^3 x-\cos^3 x$の値を求めよ。

(2) 正の数aを初項とする公差2の等差数列を$a_1, a_2, a_3, \cdots$とし、

$$S_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}} \quad (n\geqq 1)$$

とおく。

(2−1) S_nをaとnを用いて表せ。

(2−2) 100以上のすべてのnに対して$S_n\geqq\dfrac{1}{2a+4}$が成立するaの最大値を求めよ。

(3) 1つのさいころを2回投げるとき、1回目に偶数の目が出た場合はその目の数をXとし、1回目に奇数の目が出た場合は2回目に出た目の数をXとする。
ただし、さいころのすべての目の出方は同様に確からしいものとする。

(3−1) $X=1$となる確率を求めよ。

(3−2) $X=2$となる確率を求めよ。

(3−3) Xの期待値を求めよ。

答

(1) $\pm\dfrac{5\sqrt{17}}{27}$

(2) (2−1) $\dfrac{n}{a(2n+a)}$ (2−2) 20

(3) (3−1) $\dfrac{1}{12}$ (3−2) $\dfrac{1}{4}$ (3−3) $\dfrac{15}{4}$

$\boxed{2}$

放物線$y=x^2$上に3点P, A, Bがあり、各点のx座標がそれぞれ$t, t+a, t+a+p$であるとする。ここで、aおよびpは正の数とする。次の各問に答えよ。
ただし、(1)から(3)までは、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) すべての実数tに対して内積$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$の値がつねに0または正となるための必要十分条件求めよ。

(2) $\angle\mathrm{APB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$とおく。実数$t$を変化させたとき$\theta$の最大値が$\dfrac{\pi}{2}$となる条件を求めよ。また、そのときの$t$の値を求めよ。

(3) θは(2)と同じとする。実数tを変化させたときθがつねに$\dfrac{\pi}{2}$より小さくなるための条件を求めよ。

(4) (3)の条件が成り立つとする。実数tを変化させたときθが最大となるtの値を求めよ。また、そのときの$\tan\theta$の値を求めよ。

答

(1) $0<p\leqq 2$ (2) $p=2$ $t=-\dfrac{1}{2}(a+1)$ (3) $0<p<2$

(4) $-\dfrac{1}{4}(2a+p)$ $\tan\theta=\dfrac{4p}{4-p^2}$

$\boxed{3}$

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\left(x^2+x+\dfrac{1}{x}\right)^7$の展開式における定数項を求めよ。

(2) $\log_9 xy=\dfrac{7}{2}, \log_3 x^2y=9$のとき、$\dfrac{x}{y}$の値を求めよ。

(3) 直線$y=kx\ (k>0)$はx軸と直線$y=\sqrt{3}\,x$のなす角を2等分する。
定数kの値を求めよ。

(4) 1次変換fによって点(1, 2)が点(3, −5)に、点(3, −1)が点(−5,13)に移されるとする。
この変換によってある点Pが点(2,0)に移されるとき、点Pの座標を求めよ。

答

(1) 105 (2) $\dfrac{1}{27}$ (3) $k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (4) P(4,3)

$\boxed{4}$

$I_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^{\pi}x(\sin nx+n\pi\cos nx)dx\ (n=1,2,\cdots)$とする。

次の各問に答えよ。

(1) I_nを求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}I_n$を求めよ。

答

(1) $\dfrac{-\pi}{n(n+1)}$ (2) $-\pi$

$\boxed{5}$

講評

$\boxed{1}$

(1) 三角比の対称式の問題。基礎レベル。

(2) 等差数列と部分分数分解を利用して和を求める問題。教科書レベル。

(3) さいころの確率の問題と期待値の問題。例年の確率に比べるととても楽な問題。

$\boxed{2}$

(1)〜(3) 内積の計算が面倒だが、計算すると(1)から(3)まで片がつく。

(4) 二次関数の頂点を求めるだけ。要領よく計算すること。
最後の$\tan\theta$は加法定理で攻略すると楽。

$\boxed{3}$

(1) 多項定理の問題。基礎レベル。

(2) 対数方程式の問題。$\log_a X=M \Leftrightarrow X=a^M$ をテキパキと適用。

(3) 傾き$=\sqrt{3}$って60度だよね？ 基礎レベル。

(4) 点移動の行列の問題。教科書レベル。

$\boxed{4}$

(1) 三角関数とxの部分積分の問題。間違えようがない。

(2) 部分分数分解で和を求めてからの無限に飛ばす問題。教科書レベル。

記述部分は$\boxed{2}$(4)と$\boxed{4}$で他は結果のみを記入させる例年通りの形式である。今年のI期の問題もそうだが「要領よく計算する」ことが攻略の鍵であるといえよう。

$\boxed{1}$、$\boxed{3}$の小問集合を確実に攻略し、$\boxed{4}$の基本的な微分積分の大問を確実にとり、残った時間で$\boxed{2}$に挑戦するというのが妥当だろう。

英語とのバランスも考えると、８０％位が合格の目安だと考えられる。

Windom の解答速報 昭和大学(医)Ⅱ期 数学

$\boxed{1}$ (1) $(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{9} \longleftrightarrow$

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{9} \longleftrightarrow$

$\sin x\cos x=-\frac{4}{9}$

$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=\frac{17}{9}$ より

$\sin x-\cos x=\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$ よって

$\sin^3 x-\cos^3 x=(\sin x-\cos x)\times$

$(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)$

$=\underline{\pm\frac{5}{27}\sqrt{17}}$

(2)

(2-1) $a_n=2n+a-2$ より

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+a-2)(2k+a)}$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+a-2}-\frac{1}{2k+a}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2n+a}\right)=\underline{\frac{n}{a(2n+a)}}$

(2-2)

$S_n\geqq\frac{1}{2a+4} \longleftrightarrow \frac{n}{a(2n+a)}\geqq\frac{1}{2a+4}$

$\longleftrightarrow n(2a+4)\geqq a(2n+a)$

$\longleftrightarrow n\geqq\frac{a^2}{4}$ が $n\geqq 100$ で

成立するためには $n=100$ で成立

すればよいので $100\geqq\frac{a^2}{4} \longleftrightarrow$

$400\geqq a^2 \longleftrightarrow (0<)a\leqq 20$

より a の最大は $\underline{a=20}$

(3)

(3-1) $X=1$ となるには

1回目に奇数を出しかつ

2回目に1を出せばよいので

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{12}}$

(3-2) $X=2$ となるには

(1回目に2を出す) または

(1回目に奇数かつ2回目に2を出す) より

$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{4}}$

(3-3) (P:確率)

確率分布表は

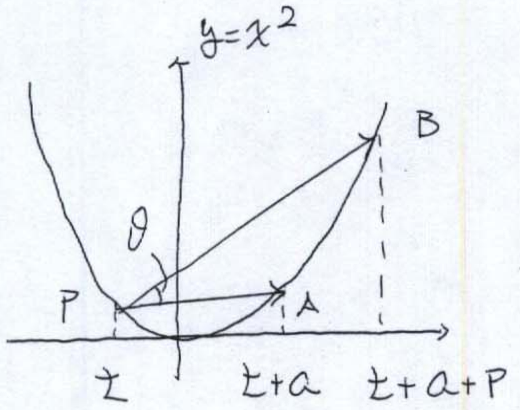
X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

より期待値 E は

$E=1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{12}$

$+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{4}=\underline{\frac{15}{4}}$

$\boxed{2}$



(1) $P(t, t^2)$, $A(t+a, (t+a)^2)$

$B(t+a+p, (t+a+p)^2)$ より

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (a, a(2t+a))$

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a+p, (a+p)(2t+a+p))$

(ここで $2t+a=x$ とする)

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = a\cdot(a+p) + a\cdot(a+p)x(x+p)$

$= a(a+p)(x^2+px+1)$ が

すべての t。すなわち すべての x で

0以上となるには 常に $x^2+px+1 \geqq 0$

となればよい。そのためには 左辺の判別式 $D \leqq 0 \Longleftrightarrow p^2 - 4 \leqq 0 \Longleftrightarrow$ ($p>0$より)

$0 < p \leqq 2$

(2)

題意を満たすには ($\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \geqq 0$ が すべての x で成立)−① かつ

($\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ となる x が存在する)−②

が成立すればよい

①は(1)より $0 < p \leqq 2$

かつ ②が成立するには $x^2 + px + 1 = 0$

が重解をもてばよいので $p=2$

(3) 常に $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$ となればよい

ので (1)から(2)を除いた

$0 < p < 2$

(4)

$\overrightarrow{PA}$ と x軸の正の方向のなす角を α

$\overrightarrow{PB}$ と x軸の正の方向のなす角を β

とすると

$$\tan\alpha = \frac{(t+a)^2}{(t+a)} = t+a$$

$$\tan\beta = \frac{(t+a+p)^2}{(t+a+p)} = t+a+p$$

$\theta = \beta - \alpha$ より

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 - \tan\beta\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{p}{1+(2t+a)(2t+a+p)}$$

($2t+a=x$ とする)

$$x^2+px+1 = \frac{p}{\tan\theta} \Longleftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + 1 = \frac{p}{\tan\theta}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より θ の最大、つまり $\tan\theta$ の

最大は $x = -\frac{p}{2} \Longleftrightarrow t = -\frac{p+2a}{4}$

のとき $\tan\theta = \frac{4p}{4-p^2}$

Windom の解答速報 昭和大学(医)Ⅱ期 数学

$\boxed{3}$ (1) $\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)^7$ の定数項は

$$\frac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 4!}(x^2)^1(x)^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4=\underline{105}$$

(2) $\log_9 xy=\frac{7}{2} \longleftrightarrow \frac{\log_3 xy}{\log_3 9}=\frac{7}{2}$

$\longleftrightarrow \log_3 x+\log_3 y=7$ ①

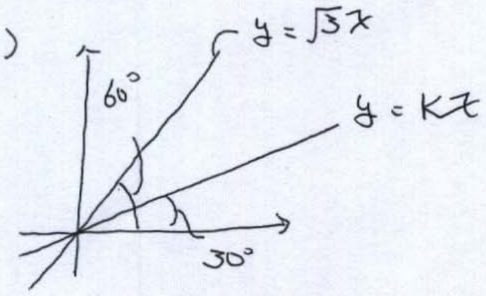
$\log_3 x^2 y=9 \longleftrightarrow 2\log_3 x+\log_3 y=9$ ②

① ② より $\log_3 x=2$, $\log_3 y=5$

よって $\log_3\frac{x}{y}=\log_3 x-\log_3 y=-3$

$\longleftrightarrow \frac{x}{y}=3^{-3}=\underline{\frac{1}{27}}$

(3)



$y=\sqrt{3}x$ と x 軸の正の方向のなす

角は $60°$ より 条件から

$y=Kx$ と x 軸の正の方向のなす

角は $30°$ となればよい。つまり

傾きは $K=\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ である。

(4) 1次変換 f を表す行列を

A とすると 条件より

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\13\end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-5&13\end{pmatrix}\longleftrightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}3&-5\\-5&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-4\end{pmatrix}$$

$P(x,y)$ とすると

$$\begin{pmatrix}-1&2\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

より $\underline{P(4,3)}$

$\boxed{4}$ (1)

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} x(\sin nx + n\pi\cos nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} x\left(-\frac{1}{n}\cos nx + \pi\sin nx\right)'dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos nx + \pi\sin nx\right)\right]_0^{\pi}\right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx + \pi\sin nx\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx + \frac{\pi}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \underline{-\frac{\pi}{n(n+1)}}\ /\!/$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\pi\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \underline{-\pi}\ /\!/$$