# Windom　2018年1月26日　昭和大I期(医学部)　解答速報　数学

## 1

次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

原点をOとし, 2点A$(\sqrt{3},\ -1)$ および B$(2\sqrt{3},\ 2)$ の位置ベクトルを $\vec{a}$ および $\vec{b}$ とする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角を求めよ。

(2)　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ となる点をPとするとき, $|\vec{p}|$ が最小となるときの $t$ の値と $|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $t$ で表せ。

(4)　$t$ が(2)で求めた値になるとき, △OABの面積は△OAPの何倍か。

【答】

(1)　$60^\circ$ または $\dfrac{\pi}{3}$　(2)　$t=-\dfrac{1}{4}$ の時 最小値 $\sqrt{3}$　(3)　$16t^2+4t$　(4)　4倍

解説

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,\quad |\vec{b}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3})+(-1)\cdot 2=6-2=4$

$\cos\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{2\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$　よって、∠AOB=60° または $\dfrac{\pi}{3}$

(2)　$|\vec{p}|^2=|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=4+8t+16t^2=16\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+3$

よって、$t=-\dfrac{1}{4}$ の時、$|\vec{p}|$ の最小値は $\sqrt{3}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ , $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\vec{b}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(t\vec{b})=t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=16t^2+4t$

(4)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|\sqrt{3}\cdot 2-(2\sqrt{3})\cdot(-1)|=2\sqrt{3}$

$t=-\dfrac{1}{4}$ の時、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}=\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}=\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$なので、

$\triangle\mathrm{OAP}=\ =\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって、$\dfrac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OAP}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$ 倍

## 2

次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を満たす複素数 $z$ のうち, 実数部分が最大であるものを求めよ。ただし $i$ は虚数単位とする。

(2)　(1)で求めた解を $z_1$ とするとき, ${z_1}^p=(1-i)^q$ となる正の整数 $p, q$ のうち, $p, q$ がそれぞれ最小となる $p, q$ の値を求めよ。

【答】

(1)　$\sqrt{3}+i$　(2)　$(p, q)=(3, 6)$

解説

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく。

$r^4=|z|^4=|z^4|=|-8+8\sqrt{3}\,i|=\sqrt{(-8)^2+(8\sqrt{3})^2}=16=2^4$

$r>0$ より $r=2$ となる。ゆえに $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$。ド・モアブルの定理より

$z^4=2^4(\cos\theta+i\sin\theta)^4=16(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=-8+8\sqrt{3}\,i$

実部と虚部を比較して

$$\begin{cases}\cos 4\theta=-\dfrac{8}{16}=-\dfrac{1}{2}\\ \sin 4\theta=\dfrac{8\sqrt{3}}{16}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi\ \Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$$

値が異なるのは, $n=0, 1, 2, 3$ に限り, 実部が最大になるのは $n=0$ の時で

$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$

(2)　$z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ と $1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ と

ド・モアブルの定理より

$${z_1}^p=(1-i)^q\ \Leftrightarrow 2^p\left(\cos\frac{\pi p}{6}+i\sin\frac{\pi p}{6}\right)=2^{\frac{q}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi q}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi q}{4}\right)\right\}$$

大きさと偏角を比較して

$p=\dfrac{q}{2}\Leftrightarrow q=2p\cdots①$　　$\dfrac{\pi p}{6}=-\dfrac{\pi q}{4}+2m\pi\Leftrightarrow 2p=-3q+24m\cdots②$

①より、$p$ が最小なら $q$ も最小である。①を②に代入すると

$2p=-3\cdot 2p+24m\Leftrightarrow 8p=24m\Leftrightarrow p=3m$

$p$ が最小の正の整数となるのは $m=1$ の時で、$p=3$ 。①に代入して $q=6$

3

次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$2018^{2018}$ の下二桁を求めよ。

(2)　$\left(3x^3+\dfrac{1}{x}\right)^9$ の展開式における $\dfrac{1}{x}$ の係数を求めよ。

(3)　$\log_3 x+\log_3 y=2$ のとき, $3x+y$ の最小値を求めよ。

(4)　次のデータの四分位偏差を求めよ。

49, 81, 67, 23, 57, 31, 73, 92, 37, 35, 60

(5)　青, 赤, 白, 黒の球がそれぞれ4個ずつ袋の中に入っている。

この袋の中から4個の球を取り出すとき, 次の問いに答えよ。

(5−1)　ちょうど2種類の色の球が取り出される確率を求めよ。

(5−2)　取り出される球の色の種類の数の期待値(平均値)を求めよ。

【答】

(1)　24　(2)　324　(3)　$6\sqrt{3}$　(4)　19　(5−1)　$\dfrac{102}{455}$　(5−2)　$\dfrac{265}{91}$

解説

(1)　下の桁は100で割った余りである。

$2018\equiv 18 \pmod{100}$ より

(i)　$18^n\equiv 18 \pmod{100}$ の時　$18^{n+1}\equiv 18\cdot 18=324\equiv 24 \pmod{100}$

(ii)　$18^n\equiv 24 \pmod{100}$ の時　$18^{n+1}\equiv 18\cdot 24=432\equiv 32 \pmod{100}$

(iii)　$18^n\equiv 32 \pmod{100}$ の時　$18^{n+1}\equiv 18\cdot 32=576\equiv 76 \pmod{100}$

(iv)　$18^n\equiv 76 \pmod{100}$ の時　$18^{n+1}\equiv 18\cdot 76=1368\equiv 68 \pmod{100}$

(v)　$18^n\equiv 68 \pmod{100}$ の時　$18^{n+1}\equiv 18\cdot 68=1224\equiv 24 \pmod{100}$ (ii)に戻る。

よって、 $n\geqq 2$ の時

$$18^n\equiv\begin{cases}68 & (n=4k+1)\\ 24 & (n+4k+2)\\ 32 & (n=4k+3)\\ 76 & (n=4k)\end{cases} \pmod{100}$$

$2018\div 4=504$ 余り2より、 $2018^{2018}\equiv 18^{2018}\equiv 24 \pmod{100}$　以上より下二桁は24

(2)　展開したときの一般項は

$${}_9C_r\cdot(3x^3)^r\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{9-r}={}_9C_r\cdot 3^r x^{3r-(9-r)}={}_9C_r\cdot 3^r x^{4r-9}$$

となる。 求めるのは$\dfrac{1}{x}$の係数なので、 $4r-9=-1$ より $r=2$

よって、係数は ${}_9C_2\cdot 3^2=36\cdot 9=324$

(3) $\log_3 x+\log_3 y=2$ の真数条件は　$x>0$ かつ $y>0$ …①

このとき、 $\log_3 xy=2 \Leftrightarrow xy=3^2=9 \Leftrightarrow y=\dfrac{9}{x}$ となる。相加相乗平均の不等式より

$$3x+y=3x+\frac{9}{x}\geqq 2\sqrt{3x\cdot\frac{9}{x}}=6\sqrt{3}$$

等号成立条件は $3x=\dfrac{9}{x} \Leftrightarrow x^2=3$ これと①より $x=\sqrt{3}$ に限る。

このとき $y=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ に限る。

最小値$=6\sqrt{3}$　($(x, y)=(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ の時)

(4)　小さい順に並べると

[23, 31, 35, 37, 49], 57, [60, 67, 73, 81, 92]

となる。 $Q_1$ =下位グループの中央値=35, $Q_3$ =上位グループの中央値=73

$$\text{四分位偏差}=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{73-35}{2}=19$$

$n$ 種類( $n=1, 2, 3, 4$)の色を取り出す確率を $P_n$ とする。

(5−1)　2色の選び方は ${}_4C_2=6$ 通り

例えば, 青と赤とすると (青, 赤)= (3, 1), (2, 2), (1, 3) の取り出し方は

$${}_4C_3\cdot{}_4C_1+{}_4C_2\cdot{}_4C_2+{}_4C_1\cdot{}_4C_3=4^2+6^2+4^2=68 \text{ 通り}$$

$$P_2=\frac{6\cdot 68}{{}_{16}C_4}=\frac{102}{455}$$

(5−2)　1色の選び方は ${}_4C_1=4$ 通り 例えば, 青のとき4個の取り出し方は ${}_4C_4=1$ 通り

$$P_1=\frac{4\cdot 1}{{}_{16}C_4}=\frac{1}{455}$$

4色の選び方は ${}_4C_4=1$ 通り　(青,赤,白,黒)=(1, 1, 1, 1)の取り出し方は

$${}_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1=4^4=256 \text{ 通り}$$

$$P_4=\frac{1\cdot 256}{{}_{16}C_4}=\frac{64}{455}$$

よって、 $P_3=1-(P_1+P_2+P_4)=1-\dfrac{1+102+64}{455}=\dfrac{288}{455}$

期待値 $E$ は

$$E=1\cdot P_1+2\cdot P_2+3\cdot P_3+4\cdot P_4=\frac{1+204+864+256}{455}=\frac{1325}{455}=\frac{265}{91}$$

4

次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+k}\right)^2$ の値を求めよ。

(2)　$y$ 軸上の点P$(0, t)$ から双曲線 $x^2-y^2=1$ へ2本の接線を引き, 接点をA, Bとする。

三角形PABの面積を $S(t)$ とするとき, $S(t)$ の最小値を求めよ。

ただし $t\neq 0$ とする。

(3)　媒介変数 $t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ によって, $x=3\cos 2t$, $y=2\sin 3t$ と表される曲線と

$x$ 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

【答】

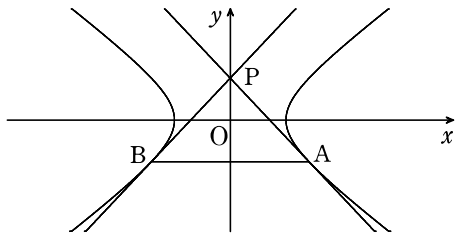
(1)　$\dfrac{1}{2}$　(2)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(3)　$\dfrac{18\sqrt{3}}{5}$

解説

(1)　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+k}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$$

(2)　$x$軸に関する対称性より $t>0$ の時の面積を考えれば十分である。




A, Bは $y$ 軸対称なので、

A$(a, b)$, B$(-a, b)$ $(a>0)$ とおく。

Aにおける双曲線の接線の式は

$ax-by=1$

これがP$(0, t)$ を通るので代入すると

$-bt=1 \Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{t}$

A$(a, b)$ は双曲線上なので、 $a^2-b^2=1$ を満たすから

$$a^2=\left(\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{t^2+1}{t^2} \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\quad(\because t>0 \text{ と } a>0 \text{ より})$$

よって、 A$\left(\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}, -\dfrac{1}{t}\right)$, B$\left(-\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}, -\dfrac{1}{t}\right)$ となる。ゆえに、

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\left\{t-\left(-\frac{1}{t}\right)\right\}=\frac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2}\quad(t>0)$$

となる。

$$S'(t)=\frac{\frac{3}{2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t\cdot t^2-(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 2t}{t^4}=\frac{\{3t^3-2t(t^2+1)\}\sqrt{t^2+1}}{t^4}$$

$$=\frac{(t^2-2)\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

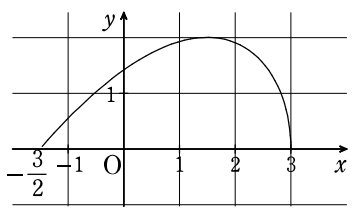
$t>0$ で $S'(t)=0$ を解くと $t=\sqrt{2}$ となる。増減表は以下の通り。

| $t$ | 0 | … | $\sqrt{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | − | 0 | + |
| $S(t)$ | | ↘ | $S(\sqrt{2})$ | ↗ |

$S(t)$ の最小値$=S(\sqrt{2})=\dfrac{(2+1)^{\frac{3}{2}}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(3)　$x=3\cos 2t$, $y=2\sin 3t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ の

グラフは右図のようになる。




求める面積を $S$ とすると

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{3}y\,dx$$

$x=x(t)=3\cos 2t$ とおくと $dx=-6\sin t\,dt$ で積分区間は

| $x$ | $-\dfrac{3}{2}$ | → | 3 |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | → | 0 |

となる。

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}2\sin 3t\cdot(-6)\sin 2t\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3t\sin 2t\,dt$$

(積和の公式： $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ より)

$$=-6\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 5t-\cos t)dt=-\left[\frac{1}{5}\sin 5t-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-6\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{18\sqrt{3}}{5}$$

5

【講評】

今年からすべて解答欄に結果のみを記入する形となった。
昨年に引き続き数学B範囲の期待値の問題が出題された。
数字の汚い問題がいくつかあるものの全体としては易な問題ばかりであると思われる。

解説