Windom　2018年2月28日　日本医科大学後期(医学部)　解答速報　数学

1

a, b, c はいずれも1以上9以下の自然数とする。
自然数 N を11進法で表すと3桁の数 $abc_{(11)}$ となり，13進法で表すと3桁の数 $cab_{(13)}$ となるという。 a, b, c の値を求めよ。
また N を10進法で表せ。解答欄には答のみを記入せよ。

【答】
$(a, b, c)=(1, 6, 1)$ ， $N=188$

解説

【解答】
自然数 N を11進法で表すと3桁の数 $abc_{(11)}$ となるので、

$$N=121a+11b+c \cdots ①$$

13進法で表すと3桁の数 $cab_{(13)}$ となるので、

$$N=169c+13a+b \cdots ②$$

①＝②より

$$121a+11b+c=169c+13a+b \Leftrightarrow 10b=168c-108a$$
$$\Leftrightarrow 5b=84c-54a=6(14c-9a) \cdots ③$$

5と6は互いに素な自然数なので b は6の倍数。
bは1以上9以下の自然数なので $b=6$ となる。

$$③ \Leftrightarrow 5\cdot 6=6(14c-9a) \Leftrightarrow 5=14c-9a \Leftrightarrow 14-9=14c-9a$$
$$\Leftrightarrow 9(a-1)=14(c-1) \cdots ④$$

9と14は互いに素なので、 $a-1$ は14の倍数。 $0\leqq a-1\leqq 8$ より $a-1=0$ すなわち $a=1$ に限る。④に代入すると $14(c-1)=0$ より $c=1$ に限る。
以上より、$(a, b, c)=(1, 6, 1)$。
これを①に代入して

$$N=121+11\cdot 6+1=188$$

2

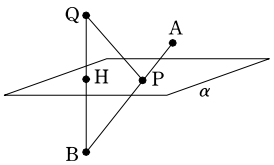
Oを原点とする座標空間において2点A $(3\sqrt{3}-3, 3\sqrt{3}+2, 0)$, B $(6, -6\sqrt{3}-1, 6\sqrt{2})$ と平面α : $\sqrt{3}x-y-\sqrt{2}z=1$ がある。直線ABとαとの交点をP, αに関してBと対称な点をQとするとき, 以下の各問いの答えのみを解答用紙に記入せよ。

問１　Pの座標を求めよ。
問２　Bから平面αに垂線BHを下ろすとき, $\overrightarrow{BH}$ を求めよ。
問３　$\overrightarrow{PQ}$を求めよ。
問４　$\cos\angle BPQ$ の値を求めよ。

【答】
問１　P$(2\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{2})$　　問２　$\overrightarrow{BH}=(2\sqrt{3}-6, 2\sqrt{3}-2, -2\sqrt{2}+2\sqrt{6})$
問３　$\overrightarrow{PQ}=(2\sqrt{3}-6, -2\sqrt{3}-6, 4\sqrt{6})$　　問４　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

【解答】 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{2}z=1 \cdots ①$とする。
問１



$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$
$$=(1-t)\begin{pmatrix}3\sqrt{3}-3\\3\sqrt{3}+2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}8\\-6\sqrt{3}-1\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3\sqrt{3}-3+(9-3\sqrt{3})t\\3\sqrt{3}+2-(9\sqrt{3}+3)t\\6\sqrt{2}t\end{pmatrix} \cdots ②$$

これを①に代入すると、

$$\sqrt{3}\{3\sqrt{3}-3+(9-3\sqrt{3})t\}-\{3\sqrt{3}+2-(9\sqrt{3}+3)t\}-\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}t=1$$
$$\Leftrightarrow (6-6\sqrt{3})+(18\sqrt{3}-18)t=0 \Leftrightarrow t=\frac{6-6\sqrt{3}}{18-18\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

これを②に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}3\sqrt{3}-3+(9-3\sqrt{3})\cdot\frac{1}{3}\\3\sqrt{3}+2-(9\sqrt{3}+3)\cdot\frac{1}{3}\\6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\1\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

問２　平面αの法線ベクトルの1つは $\vec{n}=(\sqrt{3}, -1, -\sqrt{2})$ となる。

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+s\vec{n}=\begin{pmatrix}6+\sqrt{3}s\\-6\sqrt{3}-1-s\\6\sqrt{2}-\sqrt{2}s\end{pmatrix} \cdots ③$$

とおく。これを①に代入すると

$$\sqrt{3}(6+\sqrt{3}s)-(-6\sqrt{3}-1-s)-\sqrt{2}(6\sqrt{2}-\sqrt{2}s)=1$$
$$\Leftrightarrow 6s+12\sqrt{3}-12=0 \Leftrightarrow s=2-2\sqrt{3}$$

③に代入すると、

$$\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix}6+\sqrt{3}(2-2\sqrt{3})\\-6\sqrt{3}-1-(2-2\sqrt{3})\\6\sqrt{2}-\sqrt{2}(2-2\sqrt{3})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}-3\\4\sqrt{2}+2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}-3\\4\sqrt{2}+2\sqrt{6}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-6\sqrt{3}-1\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-6\\2\sqrt{3}-2\\-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

問３

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BH}$$
$$=\begin{pmatrix}6\\-6\sqrt{3}-1\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-6\\2\sqrt{3}-2\\-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\sqrt{3}-6\\-2\sqrt{3}-5\\2\sqrt{2}+4\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4\sqrt{3}-6\\-2\sqrt{3}-5\\2\sqrt{2}+4\sqrt{6}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\1\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-6\\-2\sqrt{3}-6\\4\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

問４　$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-6\\-2\sqrt{3}-6\\4\sqrt{6}\end{pmatrix}$より、

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(2\sqrt{3}-6)^2+(-2\sqrt{3}-6)^2+(4\sqrt{6})^2=48-24\sqrt{3}+48+24\sqrt{3}+96=192$$
$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$$

また、

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}6\\-6\sqrt{3}-1\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\1\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2\sqrt{3}\\-6\sqrt{3}-2\\4\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2=(6-2\sqrt{3})^2+(-6\sqrt{3}-2)^2+(4\sqrt{2})^2=48-24\sqrt{3}+112+24\sqrt{3}+32=192$$
$$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$$

(もちろん、 $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PQ}|=8\sqrt{3}$ と求めてよい)

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}=(6-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-6)+(-6\sqrt{3}-2)(-2\sqrt{3}-6)+(4\sqrt{2})\cdot(4\sqrt{6})$$
$$=-36+24\sqrt{3}-12+36\sqrt{3}+12+36+4\sqrt{3}+32\sqrt{3}=96\sqrt{3}$$

以上より、

$$\cos\angle BPQ=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PQ}|}=\frac{96\sqrt{3}}{8\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3

複素数 z に対して

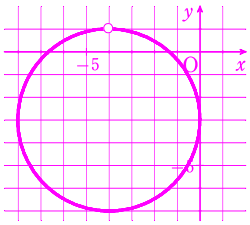
$$\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}$$

が実数となるとき, zの動く複素数平面上の図形を図示し, 絶対値 $|z|$ の最大値, 最小値を求めよ。

【答】

図形を表す式 $|z-(-4-3i)|=4$　ただし, $z \neq -4+i$

$|z|$ の最大値$=9$, $|z|$ の最小値$=1$



解説

【解答】

(前半)

$w=\dfrac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}$ とおく。 w が定義できるので、

$$z+4-i \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -4+i \cdots ①$$

w が実数なので

$$w=\overline{w} \Leftrightarrow \frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}=\overline{\left(\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}\right)}=\frac{(1-i)(\overline{z}-3i)}{\overline{z}+4+i}$$

$$\Leftrightarrow (1+i)(z+3i)(\overline{z}+4+i)=(1-i)(\overline{z}-3i)(z+4-i)$$

$$\Leftrightarrow (1+i)\{z\overline{z}+(4+i)z+3i\overline{z}+12i-3\}=(1-i)\{z\overline{z}+(4-i)\overline{z}-3iz+12i-3\}$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+(4-3i)z+(4+3i)\overline{z}=-9$$

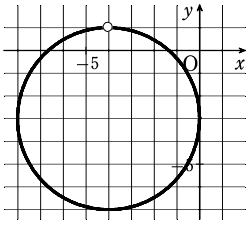
$$\Leftrightarrow (z+4+3i)(\overline{z}+4-3i)=(4+3i)(4-3i)-9=16+9-9=16$$

$$\Leftrightarrow (z+4+3i)\overline{(z+4+3i)}=16$$

$$\Leftrightarrow |z+4+3i|^2=16 \Leftrightarrow |z+4+3i|=4$$

①に注意すると、 z の軌跡は中心が $-4-3i$、半径4の円上。ただし、 $-4+i$ を除く。

図は右図のようになる。



(後半)

O(0), A$(-4-3i)$ とする。

$$\mathrm{OA}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$$

$|z|$ の最大値$=$OA$+$半径$=5+4=9$

$|z|$ の最小値$=$OA$-$半径$=5-4=1$

【別解】

$z=x+yi$ とおく。

$$z+4-i \neq 0 \Leftrightarrow (x+4)+(y-1)i \neq 0 \Leftrightarrow (x,\ y) \neq (-4,\ 1)$$

$$w=\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}=\frac{(1+i)\{x+(y+3)i\}}{(x+4)+(y-1)i}=\frac{(1+i)\{x+(y+3)i\}\{(x+4)-(y-1)i\}}{(x+4)^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{(1+i)[\{x(x+4)+(y+3)(y-1)\}+\{(x+4)(y+3)-x(y-1)\}i]}{(x+4)^2+(y-1)^2}$$

$$w\text{の虚部}=\frac{\{x(x+4)+(y+3)(y-1)\}+\{(x+4)(y+3)-x(y-1)\}}{(x+4)^2+(y-1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+y^2+2y-3+\{xy+3x+4y+12-xy+x\}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x+y^2+6y=-9 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y+3)^2=-9+4^2+3^2=16$$

これは中心が $(-4,\ -3)$ 半径 4 の円を表す。ただし、 $(-4,1)$ を除く。

中心を表す複素数は $-4-3i$ 。よって、 z の軌跡を表す式は

$$|z+4+3i|=4\ ,\ z \neq -4+i$$

(後半は同様)

4

Oを原点とする xy 平面において, 次の2曲線を考える。

$$C_1:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\ \ (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \qquad C_2:\ y=-x^3+\frac{7}{2}x$$

以下の各問いに答えよ。なお答の数値は有理化すること。

問１　C_1 と C_2 の交点の x 座標を全て求めよ。

問２　C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

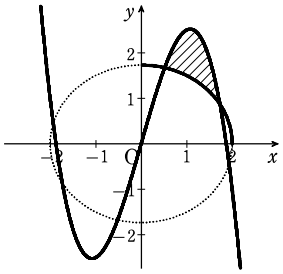
【答】

問１　$\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$　　問２　$\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi$

解説

【解答】

問１



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow 3x^2+4y^2=12 \cdots ①$$

$$y=-x^3+\frac{7}{2}x \cdots ②$$

とおく。②を①に代入すると

$$3x^2+4\left(-x^3+\frac{7}{2}x\right)^2=12$$

$$\Leftrightarrow 4x^6-28x^4+52x^2-12=0$$

$$\Leftrightarrow x^6-7x^4+13x^2-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)(x^4-4x^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=3,\ 2\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

第一象限の交点の x 座標は正の解うち、小さい方の2個なので、

$$x=\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \sqrt{3}$$

問２

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{3}=1-\frac{x^2}{4}=\frac{4-x^2}{4} \Leftrightarrow y^2=\frac{3}{4}(4-x^2)$$

$$\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-x^2}$$

ここで、$S_1=\displaystyle\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-x^3+\frac{7}{2}x\right)dx$, $S_2=\displaystyle\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ とおく。

$$S_1=\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-x^3+\frac{7}{2}x\right)dx=-\frac{1}{4}\Big[x^4\Big]_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}+\frac{7}{4}\Big[x^2\Big]_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{1}{4}\{9-(7-4\sqrt{3})\}+\frac{7}{4}\{3-(2-\sqrt{3})\}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

S_2 について、 $x=2\sin t$ とおく。 $dx=2\cos t\,dt$ であり、積分区間は

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sin\frac{\pi}{12}$$

に注意すると

x	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\to$	$\sqrt{3}$
$\sin t$	$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\to$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{12}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{3}$

となる。

このとき $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2 t)}=\sqrt{4\cos^2 t}=2|\cos t|=2\cos t$ であるから

$$S_2=\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=4\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{4}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt=2\left\{\Big[t\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\Big[\sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}\right\}$$

$$=2\left\{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$

求める面積を S とすると

$$S=S_1-\frac{\sqrt{3}}{2}S_2=\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

$\boxed{5}$

問１　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}$$

問２　すべての自然数 k と $0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^k-\frac{k}{6}x^{k+2}\leqq \sin^k x\leqq x^k$$

ただし、$\sin^k x=(\sin x)^k$ $(k=1,2,\cdots)$とする。

問３　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}$$

ただし数列 a_k に対して

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

である。

【答】

問１　$\sqrt{2}-1$　　問２　略　　問３　$e^{\frac{1}{4}}$

解説

【解答】

問１　$(n-1)^2+k^2(n-1)^2<n^4+k^2(n-1)^2<n^4+k^2n^2$ より

$$\frac{k}{(n-1)^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n-1}\right)^2}}>\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}>\frac{k}{n^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n-1)^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n-1}\right)^2}}\cdots①$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\cdots②$$

$t=1+x^2$ とおく。$dt=2xdx\Leftrightarrow xdx=\frac{1}{2}tdt$ であり積分区間は

x	$0\ \to\ 1$
t	$1\ \to\ 2$

$$②=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\Big[\sqrt{t}\Big]_1^2=\sqrt{2}-1$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n-1)^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n-1}\right)^2}}$ において $m=n-1$ とおくと $n\to\infty$ ならば $m\to\infty$であり、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n-1)^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n-1}\right)^2}}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k}{m^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{m}\right)^2}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{\frac{k}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{m}\right)^2}}=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{2}-1$$

これらの結果とはさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}=\sqrt{2}-1$$

問２　$f(x)=x-\sin x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とする。

$f'(x)=1-\cos x\geqq 0$ (等号成立は $x=0$ に限る)ので、$f(x)$ は単調増加。

$f(x)\geqq f(0)=0$ より、

$0\leqq x\leqq 1$ のとき、$\sin x\leqq x$

となる。等号成立は $x=0$ に限る。$0\leqq x\leqq 1<\frac{\pi}{2}$ に注意すると $\sin x\geqq 0$ なので、

両辺を k 乗すると

$0\leqq x\leqq 1$ のとき、$\sin^k x\leqq x^k\cdots①$

が成り立つ。等号成立は $x=0$ に限る。$g(x)=\sin x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とおく。

$$g'(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right),\ g''(x)=-\sin x+x=f(x)\geqq 0$$

等号成立は $x=0$ に限るので、$g'(x)$ は単調増加。

$g'(x)\geqq g'(0)=0$ より $g(x)$ も単調増加。

$g(x)\geqq g(0)=0$ より、

$0\leqq x\leqq 1$ のとき、$x-\frac{1}{6}x^3\leqq\sin x$

$0\leqq x\leqq 1<\sqrt{6}$ に注意すると $x-\frac{1}{6}x^3>0$ なので、両辺を k 乗すると

$0\leqq x\leqq 1$ のとき、$\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^k\leqq\sin^k x\Leftrightarrow x^k\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^k\leqq\sin^k x\cdots②$

が成り立つ。以下、全ての自然数 k に対して

$$1-\frac{k}{6}x^2\leqq\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^k\cdots③$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$k=1$ の時

③の左辺$=1-\frac{1}{6}x^2$　③の右辺$=1-\frac{1}{6}x^2$

となり等号で成立。

(ii)　$k=m$ の時、③が成り立つ 即ち $1-\frac{m}{6}x^2\leqq\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^m$ が成り立つと仮定する。

$[k=m+1$ の時の右辺$]-[k=m+1$ の時の左辺$]$

$$=\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^{m+1}-\left(1-\frac{m+1}{6}x^2\right)=\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^m-\left(1-\frac{m+1}{6}x^2\right)$$

$$\geqq\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\left(1-\frac{m}{6}x^2\right)-\left(1-\frac{m+1}{6}x^2\right)$$

$$=1-\frac{m+1}{6}x^2+\frac{m}{36}x^4-1+\frac{m+1}{6}x^2=\frac{m}{36}x^2\geqq 0$$

となり、$k=m+1$ の時も③は成り立つ。

(i), (ii)と数学的帰納法により③は成り立つ。②と③より、

$0\leqq x\leqq 1$ のとき、$\sin x\geqq x^k\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^k\geqq x^k\left(1-\frac{k}{6}x^2\right)=x^k-\frac{k}{6}x^{k+2}\cdots④$

①と④より $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$x^k-\frac{k}{6}x^{k+2}\leqq\sin^k x\leqq x^k\cdots⑤$$

が成り立つ。

問３　⑤の x に $\frac{1}{n}$を代入すると

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k-\frac{k}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+2}\leqq\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\leqq\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{k}{n}-\frac{k^2}{6n^3}\leqq 1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\leqq 1+\frac{k}{n}$$

$$\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}-\frac{k^2}{6n^3}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}\leqq\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}\leqq\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}\cdots⑥$$

ここで、

$$\log\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

となるので、

$$\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\log(1+x)dx$$

$t=1+x$ とおく。$dt=dx$ で積分区間は

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ 1$

ゆえ

$$=\int_1^2(t-1)\log t\,dt=\int_1^2 t\log t\,dt-\int_1^2\log t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}\right]_1^2-\Big[t\log t-t\Big]_1^2$$

$$=\left\{(2\log 2-1)-\left(0-\frac{1}{4}\right)\right\}-\{(2\log 2-2)-(0-1)\}=\frac{1}{4}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}=e^{\frac{1}{4}}$　　また、

$$\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}-\frac{k^2}{6n^3}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}-\frac{k^2}{6n^3}\right)$$

$$\geqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}-\frac{n^2}{6n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{6k-1}{6n}\right)$$

$$=\int_0^1 x\log(1+x)dx=\frac{1}{4}$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}-\frac{k^2}{6n^3}\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}=e^{\frac{1}{4}}$

これらの結果と⑥とはさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}=e^{\frac{1}{4}}$$

6

【講評】

大問１と大問３か完答できると思われる。

大問３の除外点の存在は気をつけないといけない。

大問２は問題設定自体は定番ではあるが数字が汚いので丁寧に計算する必要がある。

計算できれば最後まで攻略することは可能である。

大問４は楕円と三時間数のグラフをイメージして攻略することが大事である。

６次方程式の正の解は3個あるが、一番大きい解は第4象限にある。

積分も丁寧に計算すれば正解にたどり着けると思われる。

大問５は問１は区分求積法の練習問題。問２はサインのマクローリン展開の不等式の問題の亜種である。それを利用すれば問３も攻略である。

ただし、90分という時間はあまりにも短すぎる。

解説