Windom の解答速報 東北医科薬科大　数学

1

【答】

(アイ)　$-,2$　(ウエオカ)　4,3,2,3　(キク)　4, 3　(ケコサシスセ)　4,3,3,4,3,4

(ソタ)　5, 4　(チツ)　1.2

【解答】

(1)　$x(\theta)=\theta-\sin\theta,\ y(\theta)=1-\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

とおく。

$x'(\theta)=1-\cos\theta\qquad y'(\theta)=\sin\theta$

であり、P$(x(t),\ y(t))$ における法線 L_t の傾きは

$$-\frac{x'(t)}{y'(t)}=-\frac{1-\cos t}{\sin t}=-\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=-\tan\frac{t}{2}$$

(2)　Pのおける接線 ℓ_t の傾きは $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ なので、ℓ_tの式は

$$y-(1-\cos t)=\frac{\sin t}{1-\cos t}\{x-(t-\sin t)\}$$

となる。 $y=0$ を代入すると

$$-\frac{(1-\cos t)^2}{\sin t}=x-(t-\sin t)\Leftrightarrow x=t-\sin t-\frac{(1-\cos t)^2}{\sin t}$$

$t=\dfrac{4}{3}\pi$ を代入して

$$x=\frac{4}{3}\pi-\sin\frac{4}{3}\pi-\frac{\left(1-\cos\frac{4}{3}\pi\right)^2}{\sin\frac{4}{3}\pi}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\frac{9}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

よって、A$\left(\dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3},0\right)$となる。

Pのおける法線 L_t の傾きは $-\dfrac{x'(t)}{y'(t)}=-\dfrac{1-\cos t}{\sin t}$ なので、L_tの式は

$$y-(1-\cos t)=-\frac{1-\cos t}{\sin t}\{x-(t-\sin t)\}$$

となる。 $y=0$ を代入すると

$$-(1-\cos t)=-\frac{1-\cos t}{\sin t}\{x-(t-\sin t)\}$$

$$\Leftrightarrow \sin t=x-(t-\sin t)\Leftrightarrow x=t$$

$t=\dfrac{4}{3}\pi$ を代入して、 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 。よって、B$\left(\dfrac{4}{3}\pi,0\right)$ となる。

Q$(X(t),Y(t))$ はBPの中点なので、

$$X(t)=\frac{(t-\sin t)+t}{2}=t-\frac{1}{2}\sin t,\quad Y(t)=\frac{(1-\cos t)+0}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos t)$$

となる。 $t=\dfrac{4}{3}\pi$ を代入して、

$$X\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$Y=\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

となる。よって、 Q$\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ となる。

(3)　$X(t)=t-\dfrac{1}{2}\sin t,\ Y(t)=\dfrac{1}{2}(1-\cos t)$ $(0<t<2\pi)$ について

[1]　$X'(t)$ について。

$X'(t)=1-\dfrac{1}{2}\cos t>0$

[2]　$Y'(t)$ について。

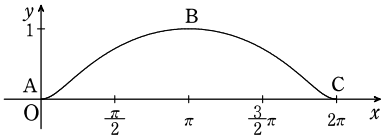
$Y'(t)=\dfrac{1}{2}\sin t$ となる。 $0<t<2\pi$ で $Y'(t)=0$ を解くと $t=\pi$ となる。

[3]　座標について

$X(0)=0,Y(0)=0$ よりA$(0,0)$とおく。 $X(\pi)=\pi,Y(\pi)=1$ よりB$(\pi,1)$とおく。

$X(2\pi)=2\pi,Y(2\pi)=0$ よりC$(2\pi,0)$とおく。増減表とグラフは以下のようになる。

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$X'(t)$		$+$	$+$	$+$	
$Y'(t)$		$+$	0	$-$	
(X,Y)	A	↗	B	↘	C



[面積について]

面積は$S=\displaystyle\int_0^{2\pi}y\,dx$である。$x=X(t)$ とおく。

$dx=X'(t)dt$ であり $y=Y(t)$, 積分区間は

x	0	→	2π
点	A	→	C
t	0	→	2π

となる。

$$S=\int_0^{2\pi}Y(t)X'(t)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos t)\left(1-\frac{1}{2}\cos t\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(2-\cos t)\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(2-3\cos t+\cos^2 t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(2-3\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-3\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}t-3\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=\frac{5}{4}\pi$$

[体積について]

体積は$V=\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}y^2dx$である。$x=X(t)$ とおく。

$dx=X'(t)dt$ であり $y=Y(t)$, 積分区間は

x	0	→	2π
点	A	→	C
t	0	→	2π

となる。

$$V=\pi\int_0^{2\pi}Y(t)^2X'(t)dt=\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(1-\cos t)^2\left(1-\frac{1}{2}\cos t\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(2-\cos t)\,dt=\frac{\pi}{8}\int_0^{2\pi}(2-5\cos t+4\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{2\pi}(2-5\cos t+2(1+\cos 2t)-(1-\sin^2 t)\cos t)dt$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{2\pi}(4-6\cos t+2\cos 2t+\sin^2 t\cos t)dt$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[4t-6\sin t+2\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=\pi^2$$

よって、 $a=1,b=2$となる。

2

【答】(アイ)　1,4　(ウエオカキク)　1,0,1,3,0,0　(ケコ)　1,6
(サシス)　2,1,5　(セソタ)　7,3,0

【解答】

千の位を a (1,2,3,4)　百の位を b (0, 1, 1)　十の位を c (1,1,2,3,4)
一の位を d (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

とする。

(1)　N が2000以上4000以下の奇数となるのは
$a=2,3,b$ はどれでもよく, c もどれでもよく, $d=1,3,5,7,9$

ならばよい。 $P=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$

(2)　N が 3 の倍数になるのは $a+b+c+d$ が3の倍数になればよい。

$(a,b,c,d)=(1か4,0,1か4,1か4か7)$　$2\times1\times3\times3=18$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,0,2.0か3か6か9)$　$2\times1\times1\times4=8$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,0,3.2か5か8)$　$2\times1\times1\times3=6$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,1,1か4,0か3か6か9)$　$2\times2\times3\times4=48$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,1,2.2か5か8)$　$2\times2\times1\times3=12$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,1,3.1か4か7)$　$2\times2\times1\times3=12$ 通り
計104通り

$(a,b,c,d)=(2,0,1か4,0か3か6か9)$　$1\times1\times3\times4=12$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,0,2.2か5か8)$　$1\times1\times1\times3=3$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,0,3.1か4か7)$　$1\times1\times1\times3=3$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,1,1か4,2か5か8)$　$1\times2\times3\times3=18$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,1,2.1か4か7)$　$1\times2\times1\times3=6$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,1,3.0か3か6か9)$　$1\times2\times1\times4=8$ 通り
計50通り

$(a,b,c,d)=(3,0,1か4,2か5か8)$　$1\times1\times3\times3=9$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,0,2.1か4か7)$　$1\times1\times1\times3=3$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,0,3.0か3か6か9)$　$1\times1\times1\times4=4$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,1,1か4,1か4か7)$　$1\times2\times3\times3=18$ 通り
$(a,b,c,d)=(3.1,2.0か3か6か9)$　$1\times2\times1\times4=8$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,1,3.2か5か8)$　$1\times2\times1\times3=6$ 通り
計48通り

よって、 $P=\frac{104+50+48}{4\cdot3\cdot5\cdot10}=\frac{101}{300}$

6の倍数は3の倍数のうち、1の位が偶数ならばよい。

$(a,b,c,d)=(1か4,0,1か4,4)$　$2\times1\times3\times1=6$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,0,2.0か6)$　$2\times1\times1\times2=4$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,0,3.2か8)$　$2\times1\times1\times2=4$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,1,1か4,0か6)$　$2\times2\times3\times2=24$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,1,2.2か8)$　$2\times2\times1\times2=8$ 通り
$(a,b,c,d)=(1か4,1,3.4)$　$2\times2\times1\times1=4$ 通り
計50通り

$(a,b,c,d)=(2,0,1か4,0か6)$　$1\times1\times3\times2=6$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,0,2.2か8)$　$1\times1\times1\times2=2$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,0,3.4)$　$1\times1\times1\times1=1$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,1,1か4,2か8)$　$1\times2\times3\times2=12$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,1,2.4)$　$1\times2\times1\times1=2$ 通り
$(a,b,c,d)=(2,1,3.0か6)$　$1\times2\times1\times2=4$ 通り
計27通り

$(a,b,c,d)=(3,0,1か4,2か8)$　$1\times1\times3\times2=6$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,0,2.4)$　$1\times1\times1\times1=1$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,0,3.0か6)$　$1\times1\times1\times2=2$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,1,1か4,4)$　$1\times2\times3\times1=6$ 通り
$(a,b,c,d)=(3.1,2.0か6)$　$1\times2\times1\times2=4$ 通り
$(a,b,c,d)=(3,1,3.2か8)$　$1\times2\times1\times2=4$ 通り
計23通り

よって、 $P=\frac{50+27+23}{4\cdot3\cdot5\cdot10}=\frac{1}{6}$

(3)　$1000\equiv-1, 100\equiv2, 10\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 7)$ より
$N=1000a+100b+10b+c$ が7の倍数になる条件は
$-a+2b+3c+d\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 7)\Leftrightarrow3c+d\equiv a-2b\ (\mathrm{mod}\ 7)$
となる。

$(a,b)=(1,0)$ の時
$3c+d\equiv1\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,5),(2,2か9),(3,6),(4,3)$
$1\times1\times(2\times1+1\times2+1\times1+1\times1)=6$ 通り

$(a,b)=(2,0)$ の時
$3c+d\equiv2\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,6),(2,3),(3,0か7),(4,4)$
$1\times1\times(2\times1+1\times1+1\times2+1\times1)=6$ 通り

$(a,b)=(3,0)$ の時
$3c+d\equiv3\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,0か7),(2,4),(3,1か8),(4,5)$
$1\times1\times(2\times2+1\times1+1\times2+1\times1)=8$ 通り

$(a,b)=(4,0)$ の時
$3c+d\equiv4\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,1か8),(2,5),(3,2か9),(4,6)$
$1\times1\times(2\times2+1\times1+1\times2+1\times1)=8$ 通り

計28通り

$(a,b)=(1,1)$ の時
$3c+d\equiv-1\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,3),(2,0か7),(3,4),(4,1か8)$
$1\times2\times(2\times1+1\times2+1\times1+1\times2)=14$ 通り

$(a,b)=(2,1)$ の時
$3c+d\equiv0\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,4),(2,1か8),(3,5),(4,2か9)$
$1\times2\times(2\times1+1\times2+1\times1+1\times2)=14$ 通り

$(a,b)=(3,1)$ の時
$3c+d\equiv1\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,5),(2,2か9),(3,6),(4,3)$
$1\times2\times(2\times1+1\times2+1\times1+1\times1)=12$ 通り

$(a,b)=(4,1)$ の時
$3c+d\equiv2\ (mod\ 7)$ より $(c,d)=(1,6),(2,3),(3,0か7),(4,4)$
$1\times2\times(2\times1+1\times1+1\times2+1\times1)=12$ 通り

計52通り

よって、 $P=\frac{28+52}{4\cdot3\cdot5\cdot10}=\frac{2}{15}$

(後半)

2の倍数でなく、5の倍数なので、 $d=1,3,7,9$ に限る。

1013, 1019　$2\times2=4$通り
1021, 1027, 1031, 1033, 1037, 1039, 1049　$1\times7=7$通り
1111, 1117　$4\times2\equiv8$通り
1121, 1123, 1129, 1133, 1139, 1147　$2\times6=12$通り
2011, 2017　$2\times2=4$通り
2021, 2027, 2029, 2033, 2039, 2041, 2047　$1\times7=7$通り
2111, 2113, 2117, 2119　$4\times4=16$通り
2123, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2147　$2\times7=14$通り
3011, 3013, 3019　$2\times3=6$通り
3023, 3029, 3037, 3041, 3043, 3047, 3049　$1\times7=7$通り

3113, 3119　$4\times2=8$通り

3121, 3127, 3131, 3133, 3137, 3139, 3149　$2\times7=14$通り

4013, 4019　$2\times2=4$通り

4021, 4027, 4031, 4033, 4037, 4043, 4049　$1\times7=7$通り

4111, 4117　$4\times2=8$通り

4121, 4127, 4129, 4133, 4139, 4141, 4147　$2\times7=14$通り

よって、

$$P=\frac{4+7+8+12+4+7+16+14+6+7+8+14+4+7+8+14}{4\cdot3\cdot5\cdot10}$$

$$=\frac{140}{4\cdot3\cdot5\cdot10}=\frac{7}{30}$$

3

【答】(ア)　4　(イ)　3　(ウエ)　-2　(オカ)　-1　(キ)　1　(クエコ)　3.2,3　(サシスセソ)　6,2,9,2,3

【解答】

(1)　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$について。

$x=\tan t$ とおく。 $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$, 積分区間は

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

となる。

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ より $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}-\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ とおく。

両辺を x^3+1 倍して

$1=A(x^2-x+1)-(x+1)(Bx+C)=(A-B)x-(A+B+C)x+A-C$

これが x の恒等式になればよいので

$A-B=0\Leftrightarrow B=A\cdots①$　$A+B+C=0\cdots②$　$A-C=1\Leftrightarrow C=A-1\cdots③$

①, ③を②に代入すると　$3A-1=0\Leftrightarrow A=\frac{1}{3}$

①, ③に代入して　$B=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

よって、

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}-\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$$

よって、 $a=3, b=-2, c=-1, d=1$ となる。

(3)　$I=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx\cdots①$$

ここで、

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx=\Big[\log|x+1|-\frac{1}{2}\log|x^2-x+1|\Big]_0^1=\log 2$$

であり、

$$\int_0^1\left(\frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx\cdots②$$

$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ とおく。

$dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}dt$ 積分区間は

x	$0\ \to\ 1$
$\tan t$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \to\ \frac{1}{\sqrt{3}}$
t	$-\frac{\pi}{6}\ \to\ \frac{\pi}{6}$

となるから

$$②=\frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 t+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}dt=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}dt=\sqrt{3}\Big[t\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\sqrt{3}\left\{\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

よって、

$$①=\frac{1}{3}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

(4)　$I=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx=\int_0^1 1\cdot\frac{1}{1+x^3}dx$ として部分積分を行う。

$$I=\left[x\cdot\frac{1}{1+x^3}\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{-3x^2}{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{2}+3\int_0^1\frac{x^3}{(1+x^3)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}+3\int_0^1\frac{x^3+1-1}{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{2}+3\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^3}-\frac{1}{(1+x^3)^2}\right)dx=\frac{1}{2}+3(I-J)$$

$$\Leftrightarrow 3J=\frac{1}{2}+2I$$

$$\Leftrightarrow J=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}I=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$