Windomの解答速報　東北医科薬科大　数学

1

【答】(アイウ)　2, 3, 3　(エ)　5　(オカキ)　2,7,4　(クケ)　-2　(コサ)　-2　(シ)　9

【解答】

(1)(1−1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$ の解が p, q なので解と係数の関係より

$$p+q=-\frac{2}{3}a \ \cdots① \Leftrightarrow q=-\frac{2}{3}a-p=-\frac{2a+3p}{3}$$

$y=f(x)$ のグラフは変曲点に関して点対称なので、極小$(p, 1)$と極大$(q, f(q))$の中点が変曲点$(r, 3)$となる。よって、

$$\frac{1+f(q)}{2}=3 \Leftrightarrow 1+f(q)=6 \Leftrightarrow f(q)=5$$

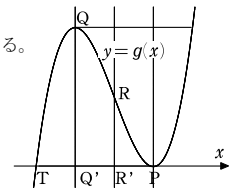
(1−2)　$g(x)=f(x)-1$ とおく。

$y=g(x)$ はP$(p, 0)$で x 軸と接し, Tで交わるとする。

Q$(q, 4)$, Q'$(q, 0)$, R$(r, 2)$, R'$(r, 0)$ とおく。

PQ'$=p-q$ であり

$$\mathrm{TQ}= =\frac{\mathrm{PQ'}}{2}=\frac{p-q}{2}$$



ゆえにTの x 座標は $q-\dfrac{p-q}{2}=\dfrac{3q-p}{2}$ となる。

因数定理より

$$f(x)-1=g(x)=\left(x-\frac{3q-p}{2}\right)(x-p)^2$$

となる。 $x=q$ を代入すると $f(q)=5$ より

$$f(q)-1=\left(q-\frac{3q-p}{2}\right)(q-p)^2=\left(\frac{p-q}{2}\right)(q-p)^2$$

$$\Leftrightarrow 5-1=-\frac{1}{2}(q-p)^3 \Leftrightarrow (q-p)^3=-8=(-2)^3$$

$q-p$ は実数なので、

$$q-p=-2 \Leftrightarrow p-q=2 \cdots ②$$

求める面積は

$$S=\int_{\frac{3q-p}{2}}^{p}\left(x-\frac{3q-p}{2}\right)(x-p)^2dx=\frac{1}{12}\left\{p-\frac{3q-p}{2}\right\}^4=\frac{1}{12}\left\{\frac{3}{2}(p-q)\right\}^4$$

(②を用いると)

$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{3}{2}\cdot 2\right\}^4=\frac{3^4}{12}=\frac{27}{4}$$

(2)(2−1)　2点$(p, 1)$, $(q, f(q))=(q, 5)$の傾きは②を用いると

$$\frac{1-5}{p-q}=\frac{-4}{2}=-2$$

(2)　ℓは$(p, 1)$を通る傾き-2の直線なので、

$$y=-2(x-p)+1$$

これが$(3, -9)$を通るので、代入すると

$$-9=-2(3-p)+1 \Leftrightarrow 2(3-p)=10 \Leftrightarrow 3-p=5 \Leftrightarrow p=-2$$

②より $q=p-2=-2-2=-4$

①に代入して　$-\dfrac{2}{3}a=p+q=-2-4=-6 \Leftrightarrow a=-6\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=9$

【参考】

【三次関数のグラフの性質】

$f(x)$ は3次関数とする。

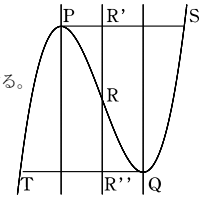
$f'(x)=0$の解を α, β とし、$f''(x)=0$の解をγ とする。

極大をP$(\alpha, f(\alpha))$, 極小をQ$(\beta, f(\beta))$, 変曲点をR$(\gamma, f(\gamma))$とする。

(1)　三次関数のグラフは変曲点Rに関して点対称である。

(2)　PR':R'S=1:2　TR'':R''Q=2:1

これを1:2の法則と言う。



【解と係数の関係(3次)】

$x^3+bx^2+cx+d=0$ の解がα, β, γ の時、 $\alpha+\beta+\gamma=-b$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c$, $\alpha\beta\gamma=-d$

$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ の解がα, β, γ の時、

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

2

【答】(アイウエ)　1,1,5,0　(オカキク)　3,9,5,0　(ケコサシスセソ)　5,0,7,5,0,0,0　(タチ)　2,9　(ツテトナ)　1,0,2,1

【解答】

(1)　A:赤球を取る。 x 座標$+1$　$P(A)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

B:青球を取る。 y 座標$+1$　$P(B)=\dfrac{3}{10}$

C:黄球を取る。 x 座標-1　$P(C)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

D:白球を取る。 y 座標-1　$P(D)=\dfrac{1}{10}$

とする。2回で原点に戻るのは A1回C1回 または B1回D1回に限る。

$$2!\cdot P(A)\cdot P(C)+2!\cdot P(B)\cdot P(D)=2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{8+3}{50}=\frac{11}{50}$$

2回でPが移動できる点は$(0, 0)$, $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$, $(\pm 1, \pm 1)$(複号任意)となるが$(0, 0)$以外に点は全てOP>1を満たす。よって、OP>1となる確率は

$$1-\frac{11}{50}=\frac{39}{50}$$

(2)　2回で原点に戻るのは A2回C2回 または B2回D2回 または A1回B1回C1回D1回の時に限る。

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot P(A)^2P(C)^2+\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot P(B)^2P(D)^2+4!\cdot P(A)P(B)P(C)P(D)$$

$$=6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2+6\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)^2+24\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}$$

$$=\frac{24}{5^4}+\frac{27}{5000}+\frac{144}{2500}=\frac{507}{5000}$$

(3)　青球と白色をXとする。

Xを4個, 赤4個, 黄2個を一列に並べて左側から k 番目を k 番目に取った球とする。

10個の球のならべ方は

$$\frac{10!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2}=10\cdot 9\cdot 7\cdot 5 \text{ 通り(分母)}$$

5回で y 軸上にいるのは最初の5回目が

赤1回黄1回X3回　または　赤2回黄2回X1回

の時に限る。

[1]　5回目まで赤1回黄1回X3回の時。残り5回はX1回赤3回黄1回並べる。

$$\frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!}=20\cdot 20=400 \text{ 通り}$$

[2]　5回目まで赤2回黄2回X1回の時。残り5回はX3回赤2回並べる。

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=30\cdot 10=300 \text{ 通り}$$

$$P=\frac{400+300}{10\cdot 9\cdot 5\cdot 7}=\frac{70}{9\cdot 5\cdot 7}=\frac{2}{9}$$

(4)　A:赤球(4個) x座標$+1$　B:青球(3個) y座標$+1$

C:黄球(2個) x座標-1　D:白球(1個) y座標-1

A4個, B3個, C2個, D1個の並べ方は

$$\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 2}=10\cdot 9\cdot 4\cdot 7\cdot 5 \text{通り(分母)}$$

元に戻る組み合わせはAC(最大2回), BD(最大1回)に注意する。

[1]　6回で(3,3)に移動　AAABBBに限る。

[2]　6回で(2,2)に移動　AABBに不動のパターンを付け加えて

[2A] AABBAC　または　[2B] AABBBD

[3]　6回で(1,1)に移動　ABに不動パターンを付け加えて

[3A] ABACAC　または　[3B] ABBDBD

[4]　6回で(0,0)に移動　ACACBDに限る。

これ以外に $y=x$ 上の点にはいけない。

	前6回	後4回	並べ方
[1]	AAABBB	ACCD	$\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{2!}=20\cdot 12=240$
[2A]	AAABBC	ABCD	$\frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot 4!=60\cdot 24=1440$
[2B]	AABBBD	AACC	$\frac{6!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=60\cdot 6=360$
[3A]	AAABCC	ABBD	$\frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!}=60\cdot 12=720$
[3B]	AABBCD	AABC	$\frac{6!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!}=180\cdot 12=2160$
[4]	AABCCD	AABB	$\frac{6!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=180\cdot 6=1080$

$$P=\frac{240+1440+360+720+2160+1080}{10\cdot 9\cdot 4\cdot 7\cdot 5}$$
$$=\frac{24+144+36+72+216+108}{9\cdot 4\cdot 7\cdot 5}=\frac{600}{9\cdot 4\cdot 7\cdot 5}=\frac{10}{21}$$

3

【答】(アイウ) 1,5,8 (エオ) 3,2 (カキク) 9,8,0 (ケコ) 0,0
(サシスセソタチ) 1,5,3,2,3,3,8 (ツテトナニ) 1,5,1,6,0

【解答】

(1) $r=\frac{3}{5-3\cos\theta}\Leftrightarrow r(5-3\cos\theta)=3\Leftrightarrow r\left(5-3\frac{x}{r}\right)=3\Leftrightarrow 5r-3x=3$

$\Leftrightarrow 5r=3x+3\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+y^2}=3x+3$

両辺を2乗して

$25x^2+25y^2=9x^2+18x+9\Leftrightarrow 16x^2-18x+25y^2=9$

$\Leftrightarrow 16\left(x^2-\frac{9}{8}x\right)+25y^2=9\Leftrightarrow 16\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+25y^2=9$

$\Leftrightarrow 16\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+25y^2=9+\frac{9^2}{16}=\frac{144+81}{16}=\frac{225}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{16^2}{225}\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{16}{9}y^2=1\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{9}{16}\right)^2}{\frac{15^2}{16^2}}+\frac{y^2}{\frac{9}{16}}=1\cdots ①$

$a=\frac{15}{16}, b=\frac{3}{4}$ であり、$a>b$ であるから、長軸 $=2a=\frac{15}{8}$, 短軸 $=2b=\frac{3}{2}$

(2) 楕円 $f(x, y)=0$ の中心は $\left(\frac{9}{16}, 0\right)$ である。焦点距離を f とすると

$f=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{15^2}{16^2}-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{15^2-9\cdot 16}{16^2}}=\frac{\sqrt{225-144}}{16}=\frac{\sqrt{81}}{16}=\frac{9}{16}$

よって、焦点は $\left(\frac{9}{16}\pm\frac{9}{16}, 0\right)=\left(\frac{9}{8}, 0\right), (0, 0)$

(3) 楕円 $f(x, y)=0$ を y 軸に関して対称に移動した楕円 $g(x, y)=0$ の式は
①の中心を y 軸上に持ってくればよいので、

$\frac{x^2}{\frac{15^2}{16^2}}+\frac{y^2}{\frac{9}{16}}=1\Leftrightarrow \frac{16^2}{15^2}x^2+\frac{16}{9}y^2=1\cdots ②$

となる。これと直線

$16\sqrt{3}x+20y-15\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 16\sqrt{3}x=15\sqrt{3}-20y\Leftrightarrow x=\frac{5(3\sqrt{3}-4y)}{16\sqrt{3}}\cdots ③$

を連立する。

$\frac{16^2}{15^2}\cdot\frac{5^2(3\sqrt{3}-4y)^2}{16^2\cdot 3}+\frac{16}{9}y^2=1\Leftrightarrow \frac{(3\sqrt{3}-4y)^2+48y^2}{27}=1$

$\Leftrightarrow 27-24\sqrt{3}y+16y^2+48y^2=27\Leftrightarrow 64y^2-24\sqrt{3}y=0$

$\Leftrightarrow 8y(8y-3\sqrt{3})=0\Leftrightarrow y=0, \frac{3\sqrt{3}}{8}$

[1] $y=0$ の時。③に代入して $x=\frac{5\cdot 3\sqrt{3}}{16\sqrt{3}}=\frac{15}{16}$ よって、$\left(\frac{15}{16}, 0\right)$

[2] $y=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ の時。③ に代入して $x=\frac{5\left(3\sqrt{3}-4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)}{16\sqrt{3}}=\frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{16\sqrt{3}}=\frac{15}{32}$

よって、$\left(\frac{15}{32}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$