Windomの解答速報 愛知医大 数学

I

$x^2-xy-6y^2+x+ay-2=0$ ―― (※)

$x^2-xy-6y^2=(x-3y)(x+2y)$ だから

(※)が2本の直線を表すとき (※)は

次の様に分解される.

$(x-3y+p)(x+2y+q)=0$ ―― (#)

$(\#)=x^2-xy-6y^2+(p+q)x+(2p-3q)y+pq=0$

(※)と係数を比較して

$p+q=1$ ―― ①

$2p-3q=a$ ―― ②

$pq=-2$ ―― ③

①より $q=1-p$ ―― ①′

①′を③へ代入

$p(1-p)=-2$

$p^2-p-2=0$

$(p-2)(p+1)=0$

$p=2,-1$

(i) $p=2$ のとき ①′より $q=-1$

② より $a=7$

(ii) $p=-1$ のとき ①′より $q=2$

②より $a=-8$

以上から $a=7,-8$

[別解]

(※) $\Longrightarrow x^2-(y-1)x-6y^2+ay-2=0$

これを x について解くと

$$x=\frac{(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-4(-6y^2+ay-2)}}{2}$$

$$=\frac{(y-1)\pm\sqrt{25y^2-2(2a+1)y+9}}{2}$$

2本の直線となるとき

根号内は完全平方式となるから

根号内 $=25y^2-2(2a+1)y+9=0$ の

判別式 $=0$

$D/4=(2a+1)^2-25\cdot9=0$

$(2a+1+15)(2a+1-15)=0$

$2(a+8)\cdot2(a-7)=0$

従って $a=-8,7$

II

30枚から2枚取り出すから

$${}_{30}C_2=\frac{30\cdot29}{2\cdot1}=15\cdot29$$

2枚の積が6の倍数となるのは

(i) 2枚共 6の倍数

$\{6,12,18,24,30\}$

から 2枚取り出す

$${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

(ii) 1枚を6の倍数から、もう1枚を

6の倍数以外の $30-5=25$ 枚の

中から取り出す

$${}_5C_1\times{}_{25}C_1=5\cdot25$$

(iii) 1枚を6の倍数以外の偶数

$15-5=10$ 枚から1枚、

もう1枚を 6の倍数以外の

3の倍数 $10-5=5$ 枚から

1枚取り出す

$${}_{10}C_1\times{}_5C_1=10\cdot5$$

(i),(ii),(iii)は排反だから,求める

確率は

$$\frac{10+5\cdot25+10\cdot5}{15\cdot29}=\frac{37}{3\cdot29}=\frac{37}{87}$$

III

$f(x) = f'(x)f''(x)$ ----- ※)

$f(x)$の最高次の係数をa, n次の整式とする。

$f(x) = ax^n + \cdots\cdots$ $(a \neq 0)$

$f'(x) = anx^{n-1} + \cdots\cdots$

$f''(x) = an(n-1)x^{n-2} + \cdots\cdots$

※)の左辺の最高次は ax^n

※)の右辺の最高次は $a^2n^2(n-1)x^{2n-3}$

比較して $ax^n = a^2n^2(n-1)x^{2n-3}$

係数について $a = a^2n^2(n-1)$

$a \neq 0$だから $1 = an^2(n-1)$ ---①

次数について $n = 2n-3$ ---②

②より $n=3$.

①に代入して $1 = 18a$

$a = \frac{1}{18}$

従って $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + bx^2 + cx + d$とおける.

$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2bx + c$

$f''(x) = \frac{1}{3}x + 2b$

※)の右辺は

$f'(x)f''(x) = (\frac{1}{6}x^2 + 2bx + c)(\frac{1}{3}x + 2b)$

$= \frac{1}{18}x^3 + bx^2 + (\frac{c}{3} + 4b^2)x + 2bc$

$f(x)$と係数を比較して

$$\begin{cases} c = \frac{c}{3} + 4b^2 & \text{---③} \\ d = 2bc & \text{---④} \end{cases}$$

③より $c = 6b^2$

④より $d = 12b^3$

従って $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + bx^2 + 6b^2x + 12b^3$

$= \frac{1}{18}(x^3 + 18bx^2 + 18\cdot 6b^2x + 18\cdot 12b^3)$

$= \frac{1}{18}(x^3 + 3\cdot 6bx^2 + 3\cdot 6^2b^2x + 6^3b^3)$

$= \frac{1}{18}(x+6b)^3$

これから方程式

$f(x) = \frac{1}{18}(x+6b)^3 = 0$ は

3重解を持つ

IV

$x_1 = 3$, $y_1 = 1$

$x_{n+1} = 2rx_n + ry_n$ ----①

$y_{n+1} = (r - \frac{1}{2})x_n + (\frac{1}{2}r + 1)y_n$ ----②

1) ① − ②×2 より

$$\begin{array}{rl} x_{n+1} &= 2rx_n + ry_n \\ -)\ 2y_{n+1} &= (2r-1)x_n + (r+2)y_n \\ \hline x_{n+1} - 2y_{n+1} &= x_n - 2y_n \end{array}$$

数列$\{x_n - 2y_n\}$は定数列だから

$x_n - 2y_n = x_1 - 2y_1 = 1$

$x_n - 2y_n = 1$ ----③

従って $P_n(x_n, y_n)$は定直線

$x - 2y = 1$に存在する.

2) ③より $y_n = \frac{x_n - 1}{2}$ ----③′

③′を①へ代入

$x_{n+1} = 2rx_n + r\cdot\frac{x_n - 1}{2}$

$x_{n+1} = \frac{5}{2}rx_n - \frac{1}{2}r$ ----※)

$$\left[\begin{array}{l}\text{特性方程式は}\\ \alpha=\frac{5}{2}r\alpha-\frac{1}{2}r\\ \left(1-\frac{5}{2}r\right)\alpha=-\frac{1}{2}r\\ \qquad\alpha=-\frac{r}{2-5r}=\frac{r}{5r-2}\end{array}\right]$$

ア) $\frac{5}{2}r=1 \Rightarrow r=\frac{2}{5}$ のとき

(※)は $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{5}$

数列 $\{x_n\}$ は等差数列となるから

$$x_n=x_1-\frac{1}{5}(n-1)=3-\frac{1}{5}(n-1)$$
$$=-\frac{1}{5}n+\frac{16}{5}$$

$x_n \longrightarrow -\infty$ $(n\longrightarrow\infty)$ だから

収束しない

イ) $r\neq\frac{2}{5}$ のとき

(※)は次の様に変形できる

$$x_{n+1}-\frac{r}{5r-2}=\frac{5}{2}r\left(x_n-\frac{r}{5r-2}\right)$$

$$x_n-\frac{r}{5r-2}=\left(x_1-\frac{r}{5r-2}\right)\left(\frac{5}{2}r\right)^{n-1}$$

$$x_n=\frac{r}{5r-2}+\left(3-\frac{r}{5r-2}\right)\left(\frac{5}{2}r\right)^{n-1}$$

収束する条件は $r\neq\frac{2}{5}$ より

$$-1<\frac{5}{2}r<1$$
$$-\frac{2}{5}<r<\frac{2}{5}$$

または

$$3-\frac{r}{5r-2}=0$$
$$r=\frac{3}{7}$$

共に x_n は

$$x_n\longrightarrow\frac{r}{5r-2}\quad(n\longrightarrow\infty)$$

へ収束する。

このとき $y_n=\frac{x_n-1}{2}\longrightarrow\frac{\frac{r}{5r-2}-1}{2}$

$$=\frac{-2r+1}{5r-2}$$
$(n\longrightarrow\infty)$

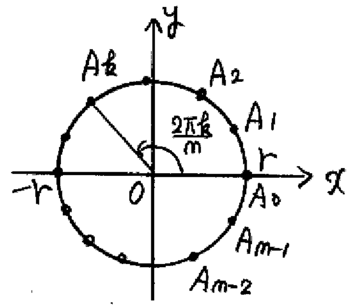
以上から収束する r の範囲は

$-\frac{2}{5}<r<\frac{2}{5}$ または $r=\frac{3}{7}$

このとき

$$P_n\longrightarrow\left(\frac{r}{5r-2},\ \frac{-2r+1}{5r-2}\right)$$
$(n\longrightarrow\infty)$

V



図の様に点を設定する

1) $\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{A_0A_k}$ $(k=1,2,3,\cdots,n-1)$

$=\overrightarrow{OA_0}\cdot(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OA_0})$

$=\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{OA_k}-|\overrightarrow{OA_0}|^2$ ----(※)

$\angle A_0OA_k=\frac{2\pi}{n}\times k=\frac{2k\pi}{n}$

$|\overrightarrow{OA_0}|=|\overrightarrow{OA_k}|=r$ だから

(※) $=r\cdot r\cos\frac{2k\pi}{n}-r^2$

$=-r^2\left(1-\cos 2\frac{k\pi}{n}\right)$

$=-2r^2\sin^2\frac{k\pi}{n}$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{OA_0}\cdot\overrightarrow{A_0A_k}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-2r^2\sin^2\frac{k}{n}\pi\right)$

$$= -2r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k}{n}\pi \text{ ----- (＊)}$$

$k=n$ のとき $\sin^2 \frac{k\pi}{n} = \sin^2 \frac{n\pi}{n} = \sin^2 \pi = 0$

従って (＊) は

$$-2r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k}{n}\pi$$

$$= -2r^2 \int_0^1 \sin^2 \pi x \, dx$$

[区分求積法より]

$$= -2r^2 \int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi x}{2} dx$$

$$= -r^2 \left[x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right]_0^1$$

$$= -r^2$$

3)

$$\overrightarrow{A_0B_n} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_0A_2} + \text{----} + \overrightarrow{A_0A_{n-1}})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{A_0A_k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_0})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{OA_0}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} - \frac{n-1}{n} \overrightarrow{OA_0}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} = \begin{cases} \vec{0} & (n\text{が偶数}) \\ m\overrightarrow{OA_0} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$

(m は定数)

従って $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} \longrightarrow \vec{0} \quad (n\to\infty)$

$$\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$$

これから

$$\overrightarrow{A_0B_n} \longrightarrow -\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{A_0O}$$

$(n \longrightarrow \infty)$

つまり B_n は $(0, 0)$ へ近づく

講評

今年は大問5題に戻った。Ⅰ，Ⅱは基本的，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴが標準からやや難。

合格ラインは 65％位と思われる。