Windom　2012年1月24日　愛知医科大(医学部)　数学解答速報
得点率70％がボーダー　3問は完問できるはず！

$\boxed{1}$

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=15$，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$を満たす多項式$f(x)$のうち、その次数が最小となるものを求めよ。

(答)　$f(x)=(2x-3)(x+1)(x-2)$

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=15\cdots$①　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3\cdots$②

とする。①より$f(-1)=0$ゆえ因数定理より$f(x)$は$x+1$を因子に持つ。

②より$f(2)=0$ゆえ因数定理より$f(x)$は$x-2$を因子に持つ。

よって、$f(x)=g(x)(x+1)(x-2)$　($g(x)$：xの多項式)と表せる。

(i)　$g(x)$を0次式と仮定する。即ち$g(x)=A$ (A：定数)とする。

$f(x)=A(x+1)(x-2)$となるが、

①より、$-3A=15\Leftrightarrow A=-5$，②より、$3A=3\Leftrightarrow A=1$

となるが、これらが同時に成り立つことはない。

(ii)　$g(x)$を1次式と仮定する。即ち$g(x)=Ax+B$ (A,B：定数)とする。

$f(x)=(Ax+B)(x+1)(x-2)$となるが、

①より、$-3(-A+B)=15\Leftrightarrow A-B=5\cdots$③

②より、$3(2A+B)=3\Leftrightarrow 2A+B=1\cdots$④

③と④より、$A=2,B=-3$

以上より、$f(x)=(2x-3)(x+1)(x-2)$

$\boxed{2}$

xの関数$f(x)=2^{1+\log_5 x}\cdot x^{\log_5 4}+5\cdot x^{\log_5 4}-2^{3+\log_5 x}-3\cdot 2^{\log_5 x}+4$ について、次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^{\log_5 x}$ とおくとき，$x^{\log_5 4}$ を t で表せ。

(2)　x の方程式 $f(x)=0$ を解け。

(答)　(1)　t^2　(2)　$1,\dfrac{1}{5}$

(1)　$t=2^{\log_5 x}$ に対して底が5の対数をとると、$\log_5 t=(\log_5 x)(\log_5 2)$

両辺を2倍すると $2\log_5 t=(2\log_5 2)(\log_5 x)=(\log_5 4)(\log_5 x)\Leftrightarrow\log_5 t^2=\log_5 x^{\log_5 4}$

よって、$x^{\log_5 4}=t^2$

(2)　$f(x)=0$ を t で表すと

$2t\cdot t^2+5t^2-8t-3t+4=0\Leftrightarrow 2t^3+5t^2-11t+4=0\Leftrightarrow(t-1)(2t-1)(t+4)=0$

$t=2^{\log_5 x}>0$に注意すると、$t=1,\dfrac{1}{2}$

(i)　$t=1$の時、$2^{\log_5 x}=1$より、$\log_5 x=0$ ゆえ、$x=1$

(ii)　$t=\dfrac{1}{2}$の時、$2^{\log_5 x}=2^{-1}$より、$\log_5 x=-1$ ゆえ、$x=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{3}$

AB$=4$, AC$=3$, $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$の三角形ABCに対して

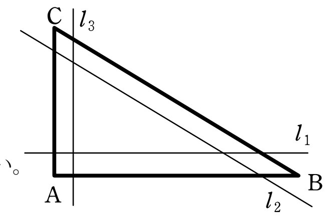
３直線 l_1，l_2，l_3 は以下の条件を満たす。

i)　l_1，l_2，l_3 はいずれも三角形ABCの内部を通る。

ii)　l_1とAB，l_2とBC，l_3とCAはそれぞれ平行である。

iii)　l_1とAB，l_2とBC，l_3とCAの間の距離は全て等しい。

l_1と直線ABではさまれる領域をP，l_2と直線BCではさまれる領域をQ，l_3と直線CAではさまれる領域をRとする。条件iii)で与えられた距離をxとするとき、和集合P∪Q∪Rと三角形ABCの共通部分の面積$S(x)$を求め、そのグラフをかけ。



(答)　$S(x)=\begin{cases}-6x^2+12x & (0<x<1)\\ 6 & \left(1\leqq x<\dfrac{12}{5}\right)\end{cases}$　グラフは略

ABをX軸、ACをY軸とする。

A(0,0), B(4,0), C(0,3)となる。

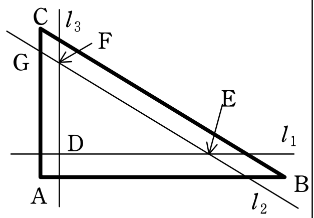
l_1が三角形ABCの内部$\Leftrightarrow 0<x<3$

BCの式は$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1\Leftrightarrow 3x+4y-12=0$であり、

BCとAの距離は$\dfrac{|0+0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$ゆえ、

l_2が三角形ABCの内部$\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{12}{5}$

l_3が三角形ABCの内部$\Leftrightarrow 0<x<4$　以上より、$0<x<\dfrac{12}{5}\cdots$①



l_3とl_1の交点をD, l_1とl_2の交点をE, l_2とl_3の交点をFとしl_2のy切片をGとする。

条件iii)より、l_1:$Y=x\cdots$②　l_3: $X=x\cdots$③

GからBCに下ろした垂線の足をHとすると、

CG:GH$=$BC:BA$\Leftrightarrow$CG:$x=5:4$　よりCG$=\dfrac{5}{4}x$

l_2の傾き$=$BCの傾き$=-\dfrac{3}{4}$なので、l_2: $Y=-\dfrac{3}{4}X+3-\dfrac{5}{4}x\cdots$④

②と③より、D(x,x)　②と④より、E$(4-3x,x)$　③と④より、F$(x,3-2x)$となる。

また、三角形DEFが存在する条件は$\begin{cases}x<4-3x\\ x<3-2x\end{cases}$より、$0<x<1$となる。

(i)　$0<x<1$の時

$S(x)=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot3-\dfrac{1}{2}\cdot(4-3x-x)(3-2x-x)=6-6(1-x)^2$

$=-6x^2+12x$

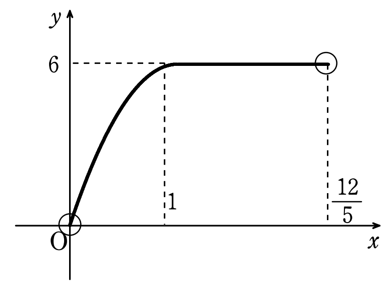
(ii)　$1\leqq x<\dfrac{12}{5}$の時

$S(x)=\triangle\mathrm{ABC}=6$

以上より、

$S(x)=\begin{cases}-6x^2+12x & (0<x<1)\\ 6 & \left(1\leqq x<\dfrac{12}{5}\right)\end{cases}$

グラフは右の通り。



$\boxed{4}$

３以上の自然数nについて，和が n 以下になる異なる２つの自然数の組み合わせの総数を　i) n が奇数のとき，ii) n が偶数のときに分けてn で表せ。

(答)　nが奇数のとき$\dfrac{(n-1)^2}{4}$　nが偶数のとき$\dfrac{n(n-2)}{4}$

$i=2,3,4,\cdots$ とする。

和が$2i-1$の時。$(1,2i-2),(2,2i-3),\cdots,(i-1,i)$まで $i-1$個

和が$2i$の時。$(1,2i-1),(2,2i-2),\cdots,(i-1,i+1)$まで $i-1$個

(i)　$n=2m$の時。和がn以下となる自然数の組の総数は

$S_{2m}=\sum_{i=2}^{m}2(i-1)=\sum_{k=1}^{m-1}2k=(m-1)m$個

$m=\dfrac{n}{2}$より、$\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\dfrac{n}{2}=\dfrac{n(n-2)}{4}$個

(ii)　$n=2m-1$の時。和がn以下となる自然数の組の総数は

$S_{2m-1}=S_{2m}-(m-1)=(m-1)m-(m-1)=(m-1)^2$個

$m=\dfrac{n+1}{2}$より、$\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right)^2=\dfrac{(n-1)^2}{4}$個

$\boxed{5}$

座標空間内に3点A(2,0,2), B(1,1,0), C(0,0,3)がある。三角形ABCをz軸の周りに１回転させてできる回転体の体積Vを求めよ。

(答)　$\dfrac{14}{3}\pi$

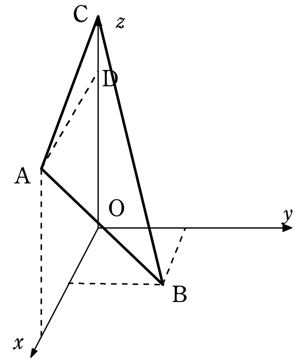
O(0,0,0), D(0,0,2)とする。

線分AB上の点をP(x,y,z)とする。

AP:PB$=1-t:t$とすると、

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1+t,1-t,2t)$

ゆえに、$\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$より、$\begin{cases}x=1+\dfrac{z}{2}\\y=1-\dfrac{z}{2}\end{cases}$となる。



ABをz軸の周りに回してできる立体の体積は

$V_1=\pi\int_0^2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^2dz$

$=\pi\int_0^2\left(2+\dfrac{z^2}{2}\right)dz=\pi\left[2z+\dfrac{z^3}{6}\right]_0^2=\dfrac{16}{3}\pi$

ACをz軸の周りに回してできる立体の体積は底円の半径AD=2高さCD=1の円錐なので$V_2=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot2^2\cdot1=\dfrac{4}{3}\pi$

BCをz軸の周りに回してできる立体の体積は底円の半径OB=$\sqrt{2}$高さOD=3の円錐なので$V_3=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot3=2\pi$

求める立体の体積は$V_1+V_2-V_3=\dfrac{16}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi-2\pi=\dfrac{14}{3}\pi$

【問題分析】

[1]　基本は$\lim_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}$が有限確定値で、$\lim_{x\to a}G(x)=0$ならば$\lim_{x\to a}F(x)=0$が必要。

足りない部分(解答の$g(x)$の次数を0から順番に調べられるかどうかがポイント)

[2]　式の迫力に負けてしまう学生が多いが、(1)の誘導がうまく解ければ単なる3次方程式の問題(しかも因数分解で片がつく)。対数をとる＆真数部分を比較するなどは基本戦術中の基本戦術である。

[3]　５問中、一番丁寧に解答を作る必要のある問題であろう。

座標を設置するの一番わかりやすいと思う。内部の三角形が存在する時と存在しない時で場合分けをするという判断ができるかどうかがポイント。

xの範囲も自力で吟味する。良問である。

[4]　n個の問題の計算は「単なる」Σの計算である。きちんと数え上げることができればたいした問題ではない。ガウスの記号を使って$\sum_{k=3}^{n}\left[\dfrac{k-1}{2}\right]$ともかける。

[5]　BCとCAを回転したところは円錐の体積の公式で攻略できる。

ABはねじれの位置にある直線の回転である。AB上の点のx座標とy座標をz座標で表すことができれば、断面積はπ(x座標$^2+$ y座標^2)に過ぎない。

ベクトルを使う解き方が一番身につきやすい方法だと思う。

【総評】

昨年の問題に比べれば、優しくなっている。

場合分けをさせる問題、平面図形、空間図形と愛知医科大の好きなテーマメドレーな感じの問題である。これらの多くは単純な計算や公式適用で攻略する問題ではない。

(1)　問題文を正しく読みなにを求めればよいかを把握すること。

(2)　何を求めるために計算をするのかを常に意識すること。

(3)　状況の変化に応じての場合分けの有無を自力で判断すること。

この３点を常に意識した記述解答作りの練習が必要である。

数学＝計算からの脱却が大事である。

無論、計算はできて当たり前にしておかなければいけないのだが。