Windomの解答速報 東京慈恵会医科大学 数学

1. (1) (ア) $\frac{1}{2}$ (イ) $\frac{\sqrt{21}}{6}$

(2) (ウ) $\frac{126(n-7)}{n(n-1)(n-2)}$ (エ) 10

(3) (オ) 2 (カ) -1

(キ) $(3,1)$ (ク) $(0,-1)$

2. $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (x\geqq 0) \\ 1-2^{-x} & (x<0) \end{cases}$

$g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

(1) $x\geqq 0$ のとき、

$h(x)=(x^2+1)\left(2^x-1-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

$=(x^2+1)(2^x-1)-2x$

(i) $h(0)=h(1)=0$

(ii) $h'(x)=2x(2^x-1)+(x^2+1)\cdot 2^x\log 2-2$

$h''(x)=2(2^x-1)+4x\cdot 2^x\log 2+(x^2+1)\cdot 2^x(\log 2)^2>0$

$[x\geqq 0$ より$]$

(iii) $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)$ は連続

$0<x<1$ で $h(x)$ は微分可能

平均値の定理から

$\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c)$ をみたす実数 c が

$0<c<1$ に存在する。

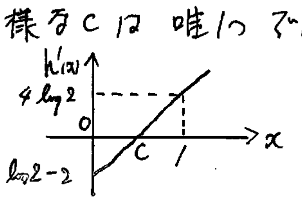
ここで (i) より $h(1)-h(0)=0$ だから

$h'(c)=0$, $0<c<1$ をみたす実数 c が存在する。

また、(ii) より $h'(x)$ は $x\geqq 0$ で単調増加で

$h'(0)=\log 2-2<0$, $h'(1)=4\log 2>0$

従って、この様な c は唯1つである。



(2) $x\geqq 0$ での $h(x)$ の増減は

x	0		c	
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	極小	↗

また、$x<0$ のとき

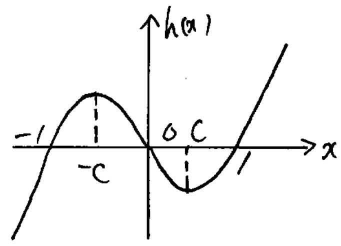
$y=h(x)=(x^2+1)\left(1-2^{-x}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

x を $-x$, y を $-y$ とすると

$-y=\{(-x)^2+1\}\left\{1-2^x+\frac{2x}{(-x)^2+1}\right\}$

$y=(x^2+1)\left(2^x-1-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

これから $y=h(x)$ のグラフは原点対称となる。



$h(x)$ の符号と $f(x)-g(x)$ の符号が対応するから

$x>1$ で $h(x)>0 \longrightarrow f(x)-g(x)>0 \Longrightarrow f(x)>g(x)$

$x=1$ $h(x)=0 \Longrightarrow f(x)-g(x)=0 \Longrightarrow f(x)=g(x)$

$0<x<1$ $h(x)<0 \longrightarrow f(x)-g(x)<0 \Longrightarrow f(x)<g(x)$

$x=0$ $h(x)=0 \Longrightarrow f(x)-g(x)=0 \Longrightarrow f(x)=g(x)$

$-1<x<0$ $h(x)>0 \longrightarrow f(x)-g(x)>0 \Longrightarrow f(x)>g(x)$

$x=-1$ $h(x)=0 \Longrightarrow f(x)-g(x)=0 \Longrightarrow f(x)=g(x)$

$x<-1$ $h(x)<0 \Longrightarrow f(x)-g(x)<0 \Longrightarrow f(x)<g(x)$

(3) $V = 2\pi \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 dx}_{ア} - 2\pi \underbrace{\int_0^1 (2^x-1)^2 dx}_{イ}$

ア) $x = \tan\theta$ とおくと $dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\begin{array}{c||c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$ア) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(1-\cos2\theta)\, d\theta$$
$$= \left[2\left(\theta - \frac{\sin2\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

イ) $イ) = \int_0^1 (4^x - 2\cdot2^x + 1)dx$
$$= \left[\frac{4^x}{\log4} - 2\frac{2^x}{\log2} + x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{4}{\log4} - \frac{4}{\log2} + 1\right) - \left(\frac{1}{\log4} - \frac{2}{\log2}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2\log2}$$

従って $V = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - 2\pi\left(1 - \frac{1}{2\log2}\right)$
$$= \pi\left(\pi + \frac{1}{\log2} - 4\right)$$

3.

(1) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ だから

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

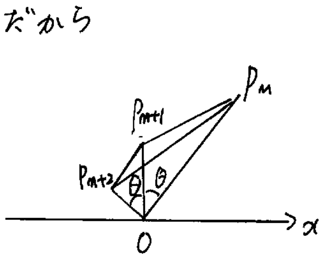
従って $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n(x_0\cos n\theta - y_0\sin n\theta)$

$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n(x_0\sin n\theta + y_0\cos n\theta)$

(2) $x_n^2 + y_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(x_0^2 + y_0^2)$ だから

$OP_n^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n(x_0^2 + y_0^2)$

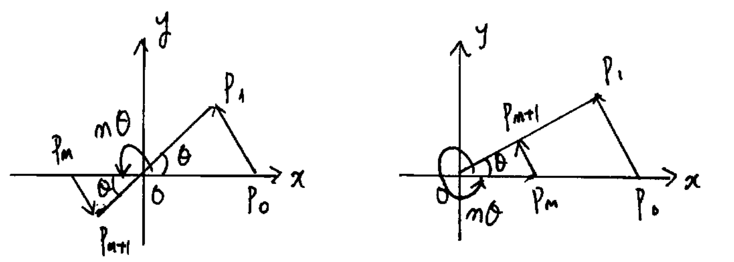
$OP_{n+1} = \frac{1}{2}OP_n$, $OP_{n+2} = \frac{1}{4}OP_n$



$S_n = \triangle OP_nP_{n+1} + \triangle OP_{n+1}P_{n+2} - \triangle OP_nP_{n+2}$
$$= \frac{1}{2}OP_n\cdot\frac{1}{2}OP_n\cdot\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}OP_n\cdot\frac{1}{4}OP_n - \frac{1}{2}OP_n\cdot\frac{1}{4}OP_n\cdot\sin2\theta$$
$$= \frac{5}{16}OP_n^2\sin\theta - \frac{1}{8}OP_n^2\sin2\theta$$
$$= \left(\frac{5}{16}\sin\theta - \frac{1}{8}\sin2\theta\right)OP_n^2$$
$$= \left(\frac{5}{16}\sin\theta - \frac{1}{8}\sin2\theta\right)(x_0^2+y_0^2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \left(\frac{5}{16}\sin\theta - \frac{1}{8}\sin2\theta\right)(x_0^2+y_0^2)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= \left(\frac{5}{16}\sin\theta - \frac{1}{8}\sin2\theta\right)(x_0^2+y_0^2)\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \left(\frac{5}{12}\sin\theta - \frac{1}{6}\sin2\theta\right)(x_0^2+y_0^2)$$

(3)



$\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ となるのは

$n\theta = k\pi$ （kは整数）のとき

従って $\frac{\theta}{\pi} = \frac{k}{n}$

n, kは共に整数だから

$\frac{\theta}{\pi}$は有理数

〈講評〉

全体的に分量・難易度ともに例年並みであった。今年は約8割が数Ⅲ·Cからの出題であった。以下、各設問ごとにポイントを述べていく。

1. (1)は円に内接する四角形の典型問題。余弦定理・正弦定理を使っていけば容易に解ける。

(2)の(ウ)は、$P_n = \frac{{}_{n-3}C_5 \times {}_3C_2}{{}_nC_7}$ を計算してnの式で表せばよい。計算ミスに注意すること。(エ)は、$\frac{P_{n+1}}{P_n} \geqq 1$ となるnの範囲を求めれば、P_nを最大にするnが求められる。

(3)の(オ)(カ)はただの計算問題。(キ)(ク)は①より、

$A = P\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}P^{-1}$ として、A^4、A^3、A^2を計算すればよい。

2. (1)(i)はただの計算問題。(ii)は$h(x)$を2回微分すれば、$x>0$より、$h''(x)>0$と容易にわかる。(iii)は$h'(x)>0$ならば、$h(x)$は単調増加であることがポイント。

(2)は$y=h(x)$のグラフを書けば、$f(x)-g(x)$の符号と$h(x)$の符号の対応により、$f(x)$と$g(x)$の大小関係がわかる。

(3)はグラフが原点対称であるから、

$$V = 2\pi\left\{\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2dx - \int_0^1(2^x-1)^2dx\right\}$$

を計算すればVが求まる。

前半の積分は$x=\tan\theta$と置換する。後半の積分は意外と受験生が覚えていない公式$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$を用いればよい。

3. (1)は、

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

を計算すれば容易に求まる。

(2)は、$S_n = \triangle OP_nP_{n+1} + \triangle OP_{n+1}P_{n+2} - \triangle OP_nP_{n+2}$

$= \frac{1}{2}OP_n\cdot OP_{n+1}\sin\theta + \frac{1}{2}OP_{n+1}\cdot OP_{n+2}\sin\theta - \frac{1}{2}OP_nOP_{n+2}\sin2\theta$

で、$OP_{n+1} = \frac{1}{2}OP_n$，$OP_{n+2} = \frac{1}{4}OP_n$ であるから、

S_nはOP_n^2とθで表せる。あとは、無限等比級数の計算をすればよい。

(3)は成分でやらずに図を書けば方針が見えてくる。

※合格ラインは80%程度と予想する。