Windomの解答速報 東京慈恵会医科大学 数学

1.

(A) (ア) $2-\sqrt{3}$

(イ) $\frac{1}{36}$

(ウ) $5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

(エ) $-1-\sqrt{2}$

(オ) -2

(カ) $-15+16\sqrt{3}i$

(B) 命題①

$(n+1)^2-n^2=2n+1$ だから
(nは整数)

すべての奇数はAの要素である。

命題②

$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$ だから
(k:整数)

4の倍数mはAの要素である。

逆に偶数mがAの要素であるとき、

a^2-b^2 で a, b の偶,奇は一致する。

このとき、$(2p)^2-(2q)^2=4(p^2-q^2)$

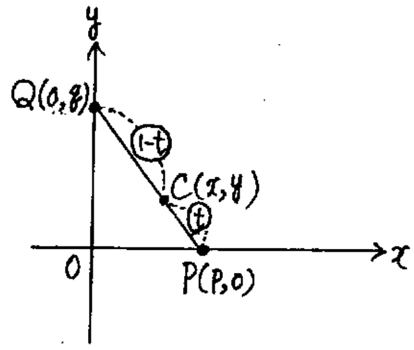
$(2p+1)^2-(2q+1)^2=4(p^2-q^2)+4(p-q)$

(p, qは整数)

いずれにしても 4の倍数となる

以上から 題意は成立する

2.



(1) 上図のように$P(p,0)$, $Q(0,q)$, $C(x,y)$とおくと、
内分点の公式より、

$x=(1-t)p$、$y=tq$

$0<t<1$ より、

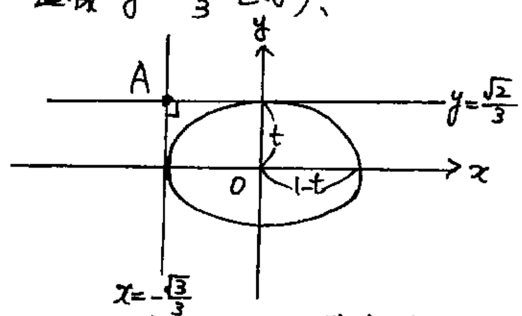
$p=\frac{x}{1-t}$、$q=\frac{y}{t}$

$PQ=1 \Leftrightarrow p^2+q^2=1$ であるから、

$\left(\frac{x}{1-t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2=1$

$\therefore C: \frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{t^2}=1$ ……(答)

(2) (i) 仮に条件をみたす2本の接線の一方が
直線 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ である場合、もう一方は
直線 $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ となり、



上図のようになるはずである。

このとき、

$$\begin{cases} 1-t=\frac{\sqrt{3}}{3} & \cdots\cdots ① \\ t=\frac{\sqrt{2}}{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ を同時にみたす

tが存在しなければならないが、

①より、$t=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$、②より、$t=\frac{\sqrt{2}}{3}$

となり、tの値が一致しない。

よって、条件をみたす2本の接線の一方が

直線 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ となることはない。

(ii) (i)より、点$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$からCにひいた接線は、

$$y-\frac{\sqrt{2}}{3}=m\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Longleftrightarrow y=mx+\frac{\sqrt{3}m+\sqrt{2}}{3}$$

とおくことができる。

これとCの式からyを消去すると、

$$\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{1}{t^2}\left(\frac{3mx+\sqrt{3}m+\sqrt{2}}{3}\right)^2=1$$

$$\therefore \frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{9m^2x^2+3m^2+2+6\sqrt{3}m^2x+6\sqrt{2}mx+2\sqrt{6}m}{9t^2}=1$$

$$\therefore 9t^2x^2+(1-t)^2\{9m^2x^2+2(3\sqrt{3}m^2+3\sqrt{2}m)x+3m^2+2\sqrt{6}m+2\}=9t^2(1-t)^2$$

$$\therefore \{9t^2+(1-t)^2\cdot 9m^2\}x^2+2(3\sqrt{3}m^2+3\sqrt{2}m)(1-t)^2x+(1-t)^2(3m^2+2\sqrt{6}m+2)-9t^2(1-t)^2=0$$

判別式をDとすると、

$$D/4=\{(3\sqrt{3}m^2+3\sqrt{2}m)(1-t)^2\}^2-\{9t^2+(1-t)^2\cdot 9m^2\}\{(1-t)^2(3m^2+2\sqrt{6}m+2)-9t^2(1-t)^2\}=0$$ より、

$$(3\sqrt{3}m^2+3\sqrt{2}m)^2(1-t)^2-\{9t^2+(1-t)^2\cdot 9m^2\}(3m^2+2\sqrt{6}m+2-9t^2)=0$$

$$\therefore \{81t^2(1-t)^2-27t^2\}m^2-18\sqrt{6}t^2m+81t^4-18t^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

点AからCにひいた2本の接線の傾きをそれぞれm_1, m_2とおくと、

m_1, m_2は③の2つの解であり、解と係数の関係より、

$$m_1\cdot m_2=\frac{81t^4-18t^2}{81t^2(1-t)^2-27t^2}=-1$$

整理すると、

$$9t^2-9t+2=0$$

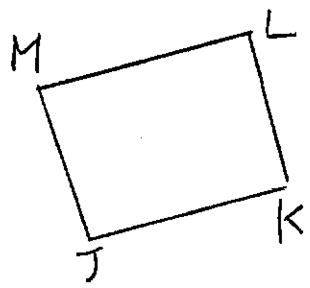
$$\therefore (3t-2)(3t-1)=0$$

$0<t<1$ より、

$t=\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ . . . . 答え

3.

(1) (i)



$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{ML}$ より 四角形JKLMは平行四辺形となるので、4点J, K, L, Mは同一平面上にある。

(ii)

$P(4m, p, 0)$ $(0\leqq p\leqq 4m)$

$Q(q, 4m, 0)$ $(0\leqq q\leqq 4m)$

$R(0, r, 4m)$ $(0\leqq r\leqq 4m)$

$S(s, 0, 4m)$ $(0\leqq s\leqq 4m)$

とする。PQRSはひし形だから

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ ---- ①

かつ $PQ=QR$ --- ②

①より

$$\begin{pmatrix} q-4m \\ 4m-p \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -s \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$q-4m=-s$ —— ③

$4m-p=r$ —— ④

また、$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} q-4m \\ 4m-p \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix} -q \\ r-4m \\ 4m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -q \\ -p \\ 4m \end{pmatrix}$ [④より]

②より

$$(q-4m)^2+(4m-p)^2=p^2+q^2+16m^2$$

$$-8mq-8mp+32p^2=p^2+q^2+16m^2$$

$$p+q=2m$$

$$q=2m-p$$

③より $s=4m-q=2m+p$

以上から

$P(4m, p, 0)$

$Q(2m-p, 4m, 0)$

$R(0, 4m-p, 4m)$

$S(2m+p, 0, 4m)$

(2) 四角形PQRSの面積をTとすると

$$T^2=|\overrightarrow{PS}|^2|\overrightarrow{PQ}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS})^2$$

ここで $\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix} p-2m \\ -p \\ 4m \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} -p-2m \\ -p+4m \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T^2=\{(p-2m)^2+p^2+(4m)^2\}\{(-p-2m)^2+(-p+4m)^2\}$$
$$-(-p^2+4m^2+p^2-4mp)^2$$

$$=(2p^2-4mp+20m^2)(2p^2-4mp+20m^2)$$
$$-\{4m(p-m)\}^2$$

$$=4(p^2-2mp+10m^2)^2-16m^2(p-m)^2$$

$$=4\{(p-m)^2+9m^2\}^2-16m^2(p-m)^2$$

$$=4\left[\{(p-m)^2+7m\}^2+32m^4\right]$$

$p=m$で最小となる

このとき

$P(4m, m, 0)$

$Q(m, 4m, 0)$

$R(0, 3m, 4m)$

$S(3m, 0, 4m)$

(3) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3m \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix}$　$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -m \\ -m \\ 4m \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}$ の両方に垂直となるベクトルの1つは　$\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

平面 $PQRS$ 上の任意の点を $X(x, y, z)$ とおくと

$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{h} = 0$ より

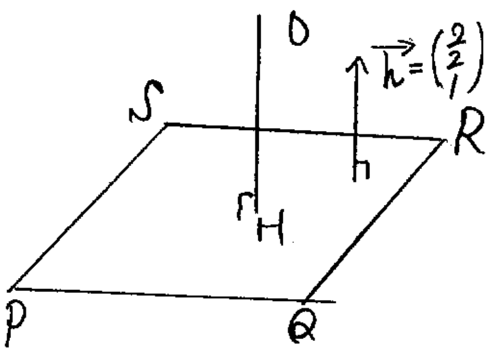
$2(x-4m)+2(y-m)+z=0$

$2x+2y+z-10m=0$ ---(※)

Oから平面 $PQRS$ へ下ろした垂線の足をHとすると

$\overrightarrow{OH} \parallel \vec{h}$ だから

$\overrightarrow{OH} = t\vec{h} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$ とおける



Hは(※)上の点だから

$2(2t)+2(2t)+t-10m=0$

$t = \frac{10m}{9}$

従って $H\left(\frac{20m}{9}, \frac{20m}{9}, \frac{10m}{9}\right)$

ここで $HP = HQ < HS = HR$

求める立体の体積は
$|\overrightarrow{HS}|$ を半径とし、高さが $|\overrightarrow{OH}|$ と
なる円錐だから

$V(m) = \frac{\pi}{3} |\overrightarrow{HS}|^2 \times |\overrightarrow{OH}|$

ここで

$\overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} \frac{7m}{9} \\ -\frac{20m}{9} \\ \frac{26m}{9} \end{pmatrix} = \frac{m}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ -20 \\ 26 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{HS}|^2 = \frac{m^2}{81}\left\{7^2+(-20)^2+26^2\right\}$

$= \frac{m^2}{81} \cdot 1125$

$= \frac{m^2}{81} \cdot 5^3 \cdot 9$

$= \frac{5^3 m^2}{9}$

$|\overrightarrow{OH}| = \frac{10m}{9}\sqrt{2^2+2^2+1^2} = \frac{10m}{3}$

従って

$V(m) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5^3 m^2}{9} \cdot \frac{10m}{3} = \frac{\pi \cdot 5^4 \cdot 2}{3^4} m^3$

(4) $a_k = \left(\frac{10}{3}k\right)^2 \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{V(k+l)}$

$$= \frac{10^2}{3^2} \sum_{l=1}^{k} \frac{3^4 \cdot k^2}{\pi \cdot 5^4 \cdot 2\,(k+l)^3}$$

$$= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{\left(1+\frac{l}{k}\right)^3} \frac{1}{k}$$

$$\xrightarrow[(k\to\infty)]{} \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx$$

[区分求積法 より]

従って

$$与式 = \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \left[-\frac{1}{2(1+x)^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{27}{100\pi}$$

講評

昨年に比べ，計算量，難易度共に上がった。特に3の空間座標と立体の体積は，受験生が苦手とする分野なので，手が止まった受験生が多かったと思われる。

合格点も昨年より下がり，70％前後と思われる。