

Windomの解答速報 杏林大学(医) 数学

I

ア	3	イ	7	ウ	9	エ	2	オ	9
カ	4	キ	2	ク	3	ケ	3	コ	5
サ	2	シ	5	ス	4	セ	6	ソ	5
タ	5	チ	2	ツ	2	テ	2		

II

ア	4	イ	2	ウ	2	エ	1	オ	—
カ	1	キ	4	ク	1	ケ	—	コ	1
サ	2	シ	2	ス	1	セ	5	ソ	—
タ	3	チ	1	ツ	—	テ	1	ト	—
ナ	3								

III

ア	2	イ	9	ウ	2	エ	7	オ	2
カ	2	キ	4	ク	3	ケ	8	コ	6
サ	1	シ	4	ス	1	セ	—	ソ	1
タ	2	チ	0	ツ	6	テ	—	ト	1
ナ	2								

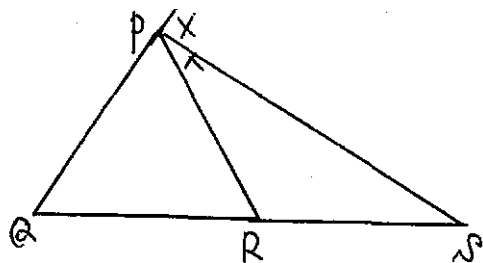
IV

ア	1	イ	3	ウ	3	エ	2	オ	1
カ	3	キ	3	ク	8	ケ	—	コ	1
サ	2	シ	5	ス	2	セ	9	ソ	2
タ	3	チ	3	ツ	1	テ	6		

講評

I, II, IVは基本的, IIIは計算量も多く, 時間内で完答は難しい。

Iは外角の二等分線の性質



$PQ : PR = QS : SR$ を利用する。

IIは1次変換の問題としては基本的。(3)でCが回転行列(原

点回りに $\frac{7}{6}\pi$ 回転)だから C^8 は $\frac{7\pi}{6} \times 8 = \frac{28\pi}{3} = 8\pi + \frac{4\pi}{3}$ 回転となる。

$$\text{従って, } C^8 = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & -\sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$$

となる。

IIIは

(a)で $f(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

$$f(f(\cos\theta)) = \cos 4\theta$$

$$f(f(f(\cos\theta))) = \cos 8\theta$$

を利用して, $\cos 8\theta = \cos\theta$

差を積に直して θ を求める。

(d)では $\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha$ が $g(\cos\theta) = 0$ の解だから解と係数の関係を利用して

$$c \cos\alpha + c \cos 2\alpha + c \cos 4\alpha = -\frac{6}{8}$$

$$c \cos\alpha + c \cos 2\alpha + c \cos 4\alpha = -\frac{1}{8}$$

$$\text{これから } \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 4\alpha}$$

$$= \frac{c \cos 2\alpha \cos 4\alpha + c \cos\alpha \cos 4\alpha + c \cos\alpha \cos 2\alpha}{c \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}$$

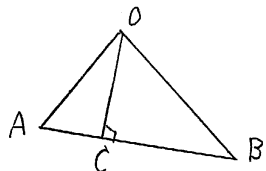
$$= \frac{-\frac{6}{8}}{-\frac{1}{8}} = 6$$

IVは基本的で, 体積は $y = -1$ が回転軸だから2曲線を $y = \sin x + 1, y = \sin 2x + 1$ として回転体の体積を求める。

III以外は基本的なので合格ラインは70%位となるであろう。

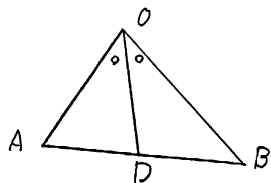
I

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とおく
 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$
 $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$
 $= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2$
 $= 9 - 4 + 4$
 $= 9$
 $\Rightarrow |\vec{AB}| = 3$



CはAB上の点だから
 $\vec{OC} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ とおける
 $\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 0$ から
 $(-\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((1-t)\vec{a} + t\vec{b}) = 0$
 $-(1-t)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$
 $-4(1-t) + 2(1-2t) + 9t = 0$

$9t - 2 = 0$
 $t = \frac{2}{9}$
 従って $\vec{OC} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$
 $= \frac{7}{9}\vec{OA} + \frac{2}{9}\vec{OB}$
 $|\vec{OC}| = \frac{1}{9} |7\vec{a} + 2\vec{b}|$
 $\therefore |7\vec{a} + 2\vec{b}|^2$
 $= 49|\vec{a}|^2 + 28\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
 $= 49 \cdot 4 + 28 \cdot 2 + 4 \cdot 9$
 $= 4 \cdot 36 \cdot 2$
 $\Rightarrow |7\vec{a} + 2\vec{b}| = 12\sqrt{2}$
 $\therefore |\vec{OC}| = \frac{12\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

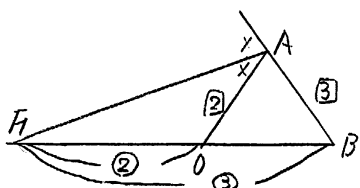


内角の二等分線の性質から
 $AD:DB = OA:OB = 2:3$
 $\vec{OD} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

$= \frac{3}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB}$
 $|\vec{OD}| = \frac{1}{5} |3\vec{a} + 2\vec{b}|$
 $\therefore |3\vec{a} + 2\vec{b}|^2$
 $= 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
 $= 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 4 \cdot 9$
 $= 12 \cdot 6$
 $= 4^2 \cdot 6$
 $\Rightarrow |3\vec{a} + 2\vec{b}| = 4\sqrt{6}$

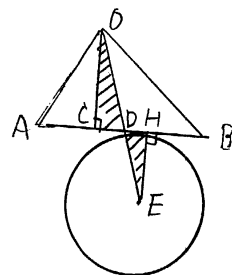
$\therefore |\vec{OD}| = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

次に $\angle OAB$ の外角の二等分線と OB との交点を F とおくと、外角の二等分線の性質から



$AB:AO = FB:FO$
 $3:2 = FB:FO$ から
 $\vec{OF} = -2\vec{OB} = -2\vec{b}$

$\vec{OE} = k\vec{OD}$ とおくと
 $\vec{OE} = \frac{3k}{5}\vec{a} + \frac{2k}{5}\vec{b}$
 従って、EはAF上の点だから
 $\vec{OE} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OF}$
 $= (1-s)\vec{a} - 2s\vec{b}$
 \vec{a}, \vec{b} は 1次独立だから
 比較して
 $\frac{3k}{5} = 1 - s \quad \text{--- ①}$
 $\frac{2k}{5} = -2s$
 $s = -\frac{1}{5}k$
 ①に代入
 $\frac{3}{5}k = 1 + \frac{1}{5}k$
 $\frac{2}{5}k = 1 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$
 従って $\vec{OE} = \frac{5}{2}\vec{OD}$



Eから $AB \perp FE$ かつ $OC \perp AB$ の
 交点 H とおくと
 $\triangle OCD \sim \triangle EHD$
 従って
 $OC:EH = OD:DE \quad \text{--- ②}$
 $\therefore OC = \frac{4}{3}\sqrt{2}$
 $OE = \frac{5}{2}OD$ から
 $DE = OE - OD = \frac{3}{2}OD$
 ②より
 $\frac{4}{3}\sqrt{2}:EH = OD:\frac{3}{2}OD = 2:3$
 $EH = 2\sqrt{2}$
 半径は $2\sqrt{2}$

II (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

f, g の表す行列は

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

従って $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

f, g の表す行列は

$A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{--- ③}$

f, g^{-1} の表す行列は

$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5\alpha + 3\beta \\ -3\alpha - 5\beta \end{pmatrix} \quad \text{--- ④}$

① = ② から

$\frac{1}{4}(5\alpha + 3\beta) = \alpha \quad \text{--- ⑤}$

$-\frac{1}{4}(3\alpha + 5\beta) = 1 \quad \text{--- ⑥}$

⑤ $\Rightarrow \alpha + 3\beta = 0$

$\alpha = -3\beta \quad \text{--- ⑤'}$

⑥ $\Rightarrow 3\alpha + 5\beta = -4$

⑤' に代入

$-9\beta + 5\beta = -4$

$\beta = 1$

⑤' より $\alpha = -3$

(2) $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{--- ⑦}$

$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = -\frac{1}{2}$

満足する θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) は

$\theta = \frac{7}{6}\pi$

従って

$C = \begin{pmatrix} \cos \frac{7}{6}\pi & -\sin \frac{7}{6}\pi \\ \sin \frac{7}{6}\pi & \cos \frac{7}{6}\pi \end{pmatrix}$

$C^\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$\frac{\theta}{6}\pi = \frac{2\theta}{3}\pi = \theta\pi + \frac{4\pi}{3}$

従って

$C^{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & -\sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

$C^{\theta} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

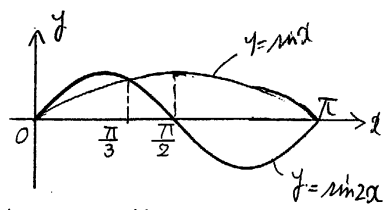
$= \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

∴ $h(\cos\beta) = 0$ となるから
 $\rho \cos^3\beta + 4 \cos^2\beta - 4 \cos\beta - 1 = 0$
 $4 \cos^3\beta + 2 \cos^2\beta - 2 \cos\beta = \frac{1}{2}$

従って
 $(*) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

∴
 $\cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta = -\frac{1}{2}$

IV



$y = \sin x$ と $y = \sin 2x$ との交点

$\sin x = \sin 2x$
 $\sin x = 2 \sin x \cos x$
 $2 \sin x (\cos x - \frac{1}{2}) = 0$

$x = 0, \pi$ は除外から

$\cos x = \frac{1}{2}$

$0 < x < \pi$ より $x = \frac{\pi}{3}$

$y = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

交点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

次に

$f(x) = \sin x - \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$)

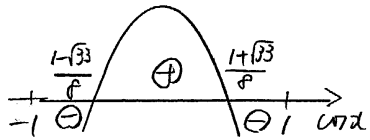
とおく

$f'(x) = \cos x - 2 \cos 2x$
 $= \cos x - 2(2\cos^2 x - 1)$
 $= -4 \cos^2 x + \cos x + 2$

$f'(x) = 0$ とおくと
 $-4 \cos^2 x + \cos x + 2 = 0$

$4 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ (*)

$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$



$\cos x_1 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$

$\cos x_2 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$

とすると

x	0	x_1	x_2	π
$f(x)$	-	+	-	-
$f'(x)$		↘	↗	↘

根小とする x_1 は

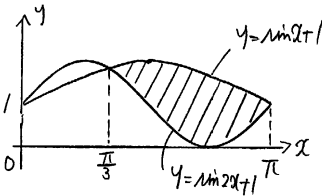
$\cos x_1 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$

次に (*) の解と係数の関係から

$\cos x_1 \cos x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

次に $y = -1$ を新たな x 軸と
 考えると 2 曲線は

$\begin{cases} y = \sin x + 1 \\ y = \sin 2x + 1 \end{cases}$ とおくと



求める体積 V とおくと

$\frac{V}{\pi} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x + 1)^2 dx$

$- \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin 2x + 1)^2 dx$

∴

$(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x + 1$

$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \sin x + 1$

$= \frac{3}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + 2 \sin x$

$(\sin 2x + 1)^2 = \sin^2 2x + 2 \sin 2x + 1$
 $= \frac{1 - \cos 4x}{2} + 2 \sin 2x + 1$
 $= \frac{3}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + 2 \sin 2x$

$(\sin x + 1)^2 - (\sin 2x + 1)^2$
 $= -\frac{\cos 2x}{2} + 2 \sin x + \frac{\cos 4x}{2} - 2 \sin 2x$

$\frac{V}{\pi} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left\{ (\sin x + 1)^2 - (\sin 2x + 1)^2 \right\} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(-\frac{\cos 2x}{2} + 2 \sin x + \frac{\cos 4x}{2} - 2 \sin 2x \right) dx$

$= \left[-\frac{\sin 2x}{4} - 2 \cos x + \frac{\sin 4x}{8} + \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$= (2 + 1) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2} \right)$

$= \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$

従って $V = \left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \pi$

次に、2 曲線 $y = \sin x$ と $y = \sin 2x$ の
 面積 S とおくと

$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx$

$+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx$

$= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$+ \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)$

$+ \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$

$= \frac{5}{2}$