

Windom 2012年2月8日 日本大学(医学部) 数学解答速報 『日大予想問題4』に内接四角形の問題あったぞ。

(計算ミスをしないうに。落ち着いて計算できれば勝ち) 2ミスがボーダー

1

以下の設問(1)~(8)については、答えだけを解答欄に書きなさい。

(1) つぎの式を簡単にしなさい。ただし、平方根の中はできるだけ簡単にして答えなさい。

(2) x の2次方程式 $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$ が異なる2つの正の実数解をもつように定数 m を定めるとき、 m の値の範囲を求めなさい。

(3) 白玉4個、赤玉8個が入っている袋から玉を1個取り出し、色を調べてからもとに戻すことを6回続けて行うとき、5回目に2度目の白球が出て、かつ、6回目に4度目の赤玉がでる確率を求めなさい。

(4) 関数 $y = 2\cos^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(ただし $0 \leq x < 2\pi$)の最大値を求めなさい。

(5) 15分毎に分裂して個数が2倍に増えるバクテリアがある。

このバクテリア100個が 10^{10} 個以上に増えるのは、最低何分後であるか求めなさい。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(6) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = -\frac{1}{3}a_n + 5n - \frac{7}{3}$ を満たすとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(7) 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ について、 A^{35} を求めなさい。

ただし、 A^{35} は A の35乗を表す。

(8) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ の変曲点の x 座標の値を a で表すとき、定積分

$$\int_1^a \frac{\log x}{x} dx$$

を求めなさい。ただし、 \log は自然対数を表す。答えは a を求めて、その値を代入したものを書きなさい。

(答) (1) $9 - 3\sqrt{2}$ (2) $2 < m < 6$ (3) $\frac{64}{729}$ (4) $\frac{17}{8}$ (5) 399

(6) $5 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ (7) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (8) $\frac{9}{8}$

2

原点 O の座標平面上に曲線

$$y = x + \frac{2\sqrt{2}}{x} \quad (\text{ただし, } x > 0)$$

があり、この曲線上に動点 P がある。 OP が最小となるときの点 P の x 座標の値を α で表す。このとき、以下の問いに答えなさい。

ただし、(1)と(2)については答えだけを解答欄に書きなさい。

(1) α の値を求めなさい。

(2) 点 $\left(\alpha, \alpha + \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\right)$ における曲線の接線を l とする。 l の方程式を

$y = ax + b$ と表すとき、 a, b の値を求めなさい。ただし、答えは

(1)で求めた α の値を代入して計算したものを書きなさい。

(3) 曲線と(2)の l と直線 $x = \sqrt{2}e$ で囲まれる図形の面積を求めなさい。

ただし、 e は自然対数の底を表す。

(答) (1) $\alpha = \sqrt{2}$ (2) $a = 1 - \sqrt{2}$ $b = 4$

(3) $\sqrt{2}e^2 - 4\sqrt{2}e + 5\sqrt{2}$

3

円に内接する四角形 $ABCD$ があり、

$$AB = \sqrt{3}, BC = 3\sqrt{3}, CD = DA = \sqrt{7}, \angle ABC = 60^\circ$$

を満たしている。また、点 A と点 C を線分で結び、三角形 ABC の内接円の中心を I 、その内接円と辺 BC との接点を E とする。

このとき、以下の問いに答えなさい。

ただし、(1)と(2)については答えだけを解答欄に書きなさい。

(1) IE を求めなさい。ただし、答えは、分数の分母を有理化した形で書きなさい。

(2) CE を求めなさい。

(3) 点 I と点 D を線分で結ぶとき、 ID を求めなさい。

(答) (1) $\frac{4 - \sqrt{7}}{2}$ (2) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{21}}{2}$ (3) $\sqrt{7}$

4

平行六面体 $ABCD - EFGH$ において

$$\vec{AB} = (2, 0, 0), \vec{AD} = (0, 2, 0), \vec{AE} = (1, -2, 1)$$

とする。線分 AB 上に点 P 、線分 DH 上に点 Q を、 $\vec{PQ} \perp \vec{AB}$ かつ

$\vec{PQ} \perp \vec{AE}$ を満たすように選ぶ。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) \vec{PQ} を求めて、成分表示しなさい。

(2) 4点 B, D, P, Q を頂点とする四面体の体積を求めなさい。

(答) (1) $\left(0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (2) $\frac{8}{25}$