Windom 2011年3月5日 昭和大(II期) (医学部) 数学 解答速報

1

次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) A,Bの二人がそれぞれ二枚の硬貨を持って同時に投げ，表の出た枚数の多い方を勝ちとする。勝負がつかないときは再び硬貨投げを繰り返し，どちらから勝つまで続けるとする。ただし，どの硬貨も表の出る確率は$\frac{1}{2}$とする。

(1−1) 1回の硬貨投げでAが勝つ確率を求めよ。

(1−2) 1回の硬貨投げで勝負がつかない確率を求めよ。

(1−3) n回目の硬貨投げでAが勝つ確率を求めよ。ただし，nは正の整数とする。

(1−4) 硬貨を投げの回数がn回以下で勝負がつく確率を求めよ。ただし，nは正の整数とする。

(2) 三角形OABは辺の長さが$a\ (a>0)$の正三角形である。辺OAを1:2に内分する点をL，OBを2:1に内分する点をMとし，線分AM，BLの交点をNとする。
また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。

(2−1) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=x\vec{a}+y\vec{b}$となる実数$x, y$を求めよ。

(2−2) 線分NAの長さを求めよ。

(2−3) 線分NLの長さを求めよ。

(2−4) $\angle \mathrm{ANL}=\theta$とおく。$\cos\theta$を求めよ。

【解答】

(1) Aの表の枚数がm枚，Bの表の枚数がn枚となる確率を$P(m,n)$と書くことにする。

(1−1) 1回投げてAが勝つ確率P_Aは

$$P(2,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\quad P(2,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16},$$

$$P(1,0)={}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$ の総和なので，$P_A=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$

(1−2) 1回投げて引き分けとなる確率P_Dは

$$P(2,2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16},\quad P(1,1)={}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot{}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P(0,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$$ の総和なので、$P_D=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$

【別解】$P_B=P_A=\frac{5}{16}$に注意すると$P_D=1-(P_A+P_B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

(1−3) n回目にAが勝つと言うことは$n-1$回引き分けでn回目にAが勝てばよいので求める確率P_nは，$P_n={P_D}^{n-1}\cdot P_A=\frac{5}{16}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

(1−4) n回目投げて勝負がつかない確率は${P_D}^n=\left(\frac{3}{8}\right)^n$であり，求める確率はこの余事象の確率なので，$1-\left(\frac{3}{8}\right)^n$

【別解】 n回目にAまたはBが勝つ確率は $2P_n$ なので、求める確率は

$$P=\sum_{k=1}^{n}2P_k=\frac{5}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n}{1-\frac{3}{8}}=1-\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

2

自然数nに対して，正の整数a_n, b_nを

$$(4+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$$

により定める。ただし，上の式を満たす整数a_n, b_nがただ一組に限ることは使用してよいとする。次の問いに答えよ。

(1) a_1, b_1 および a_2, b_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(3) 任意のnについて，a_nを3で割ると1余ることを示せ。

(4) 任意のnについて，b_nを3で割った余りとnを3で割ったあまりは等しいことを示せ。

【解答】

$(4+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ …①

(1) $n=1$ の時、①は$a_1+b_1\sqrt{3}=4+\sqrt{3}$

$a_1, b_1, 4$ は整数で$\sqrt{3}$ は無理数なので$a_1=4, b_1=1$

$n=2$ の時、①は$a_2+b_2\sqrt{3}=(4+\sqrt{3})^2=19+8\sqrt{3}$

$a_2, b_2, 19, 8$ は整数で$\sqrt{3}$ は無理数なので$a_2=19, b_2=8$

(2) $a_{n+1}+b_{n+1}=(4+\sqrt{3})^{n+1}=(4+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})^n=(4+\sqrt{3})(a_n+b_n\sqrt{3})$

$=(4a_n+3b_n)+(a_n+4b_n)\sqrt{3}$

$a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ は整数で$\sqrt{3}$ は無理数なので

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+3b_n \ \cdots② \\ b_{n+1}=a_n+4b_n \ \cdots③ \end{cases}$$

(3) $a_n\equiv 1\ (mod\ 3)$ を示す。

(i) $n=1$の時。

$a_1=4\equiv 1\ (mod\ 3)$ より成立。

(ii) $n=k$の時。

$a_k\equiv 1\ (mod\ 3)$を仮定する。②より

$a_{k+1}=4a_k+3b_k\equiv 4\cdot 1+0\equiv 1\ (mod\ 3)$

より$n=k+1$の時も成立。

(i)と(ii)と数学的帰納法により題意成立。

(4) $b_n\equiv n\ (mod\ 3)$ を示す。

(i) $n=1$の時

$b_1=1$より、$b_1\equiv 1\ (mod\ 3)$で成立。

(ii) $n=2$の時

$b_2=8\equiv 2\ (mod\ 3)$ で成立。

(iii) $n=3$の時

$b_3=a_2+4b_2=19+32=51\equiv 0\ (mod\ 3)$ と$3\equiv 0\ (mod\ 3)$より成立。

(iv) $n=k$の時。

$b_k\equiv k\ (mod\ 3)$を仮定する。(3)の結果より、$a_k\equiv 1\ (mod\ 3)$と③より

$b_{k+1}=a_k+4b_k\equiv 1+4k\equiv k+1\ (mod\ 3)$

より$n=k+1$の時も成立。

(i)〜(iv)と数学的帰納法により題意成立。

$\boxed{3}$

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $3^x=5^y=7^z=t$ で $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$であるとき，$t$の値を求めよ。

(2) 不等式$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}>\tan\theta\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ を満たすθの範囲を求めよ。

(3) 2つの行列 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ がある。次の問に答えよ。

(3−1) 行列Bの逆行列B^{-1}を求めよ。

(3−2) $A=B^{-1}CB$となる行列Cを求めよ。

(3−3) A^nを求めよ。ただし，nは自然数とする。

【解答】

(1) $3^x=5^y=7^z=t$ より、$t>0$であり，x,y,zは0にならないので$t\neq1$

$3^x=t$より$x=\log_3 t=\frac{1}{\log_t 3}$，$5^y=t$より$y=\log_5 t=\frac{1}{\log_t 5}$，

$7^z=t$より$z=\log_7 t=\frac{1}{\log_t 7}$ となる。

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow \log_t 3+\log_t 5+\log_t 7=2 \Leftrightarrow \log_t 105=2$

よって$t^2=105$ であり，$t>0$ゆえ$t=\sqrt{105}$

(2) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^2\frac{\theta}{2}$ と $\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ より

与式$\Leftrightarrow \tan^2\frac{\theta}{2}>\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ …①

(ア) $\theta=0$の時。①の左辺$=0$，①の右辺$=0$より不適。

(イ) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$の時。$0<\tan\frac{\theta}{2}$ と$0<1-\tan^2\theta<1$より

① $\Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2}>\frac{2}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2}\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)>2$ …②

ところが，$0<\tan\frac{\theta}{2}<1$ と$0<1-\tan^2\theta<1$より $0<$②の左辺<1なので

②は常に不成立。よって不適

(ウ) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$の時。$\tan\frac{\theta}{2}>1$と$1-\tan^2\theta<0$より

①の左辺>0，①の右辺<0が常に成り立つので、適。

以上より、$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

(3)

(3−1) $B^{-1}=\frac{1}{-2+1}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}$

(3−2) $B^{-1}CB=A$より

$C=BAB^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

(3−3)

$A^n=(B^{-1}CB)^n=B^{-1}C^nB$

$=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&-1+2^n\\2-2^{n+1}&-1+2^{n+1}\end{pmatrix}$

$\boxed{4}$

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $f(x)=\sin x+x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$を満たす関数$f(x)$を求めよ。

(2) 放物線$y=3x^2$と3直線 $x=a,\ x=1,\ y=0$ で囲まれた部分を S_1 とする。

また、放物線 $y=3x^2$と2直線$x=a,\ y=0$で囲まれた部分を S_2 とする。

ただし、aは$0<a<1$を満たす実数とする。次の問に答えよ、

(2−1) S_1 をx軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(2−2) S_2 をy軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ。

(2−3) V_1+V_2の最大値を求めよ。

【解答】

(1) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$ とおく。$f(x)=\sin x+Ax$となる。

$u=t-\frac{\pi}{2}$ とおくと、$du=dt$で

t	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
u	$-\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

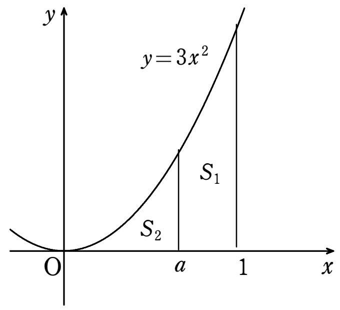
であり

$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(u)du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(\sin u+Au)du=\left[-\cos u+\frac{A}{2}u^2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0=-1-\frac{\pi^2}{8}A$

よって、$\left(1+\frac{\pi^2}{8}\right)A=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi^2+8}{8}A=-1 \Leftrightarrow A=\frac{-8}{\pi^2+8}$

従って，$f(x)=\sin x-\frac{8}{\pi^2+8}x$

(2)



(2−1)

$V_1=\pi\int_a^1 9x^4dx=\frac{9\pi}{5}\left[x^5\right]_a^1=\frac{9\pi}{5}(1-a^5)$

(2−2) バームクーヘン型積分公式より

$V_2=2\pi\int_0^a x\cdot 3x^2dx=6\pi\int_0^a x^3dx$

$=\frac{3}{2}\pi\left[x^4\right]_0^a=\frac{3}{2}\pi a^4$

【別解】$y=3x^2$より$x^2=\frac{y}{3}$なので

$V_2=\pi a^2\cdot 3a^2-\pi\int_0^{3a^2}\frac{y}{3}dy=3\pi a^4-\frac{\pi}{6}\left[y^2\right]_0^{3a^2}=\frac{3}{2}\pi a^4$

(2−3)

$f(a)=V_1+V_2=\frac{9\pi}{5}(1-a^5)+\frac{3}{2}\pi a^4$とおく。

$f'(a)=-9\pi a^4+6\pi a^3=-9\pi a^3\left(a-\frac{2}{3}\right)$

a	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	極大	↘	

増減表より$a=\frac{2}{3}$で極大かつ最大。

最大値$=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{5}\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}+\frac{3}{2}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{251}{135}\pi$

【講評】

I期(1月28日実施)と出題分野はすべて同じで，問題のレベルもI期と同様すべて基本から標準の設定となっている。

I期を受験した学生にとって非常に対応し易いセットとなっている。

入試終了後、できなかった問題を解き直しておくということは必須作業でありその積み重ねが他大の受験(昭和のII期においても)にも役に立つと言うことは言うまでもない。

I期同様 正規合格には少なくとも90%前後の得点率が要求される。

なお、講習会『昭和大学医学部 II期FINAL TRY OUT』(2月23日～3月4日実施)では$\boxed{2}$と同様な証明問題を扱っている。