Windom 2011年1月28日 昭和大(I期) (医学部) 数学 解答速報

$\boxed{1}$

次の各問に答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 箱の中に1からnまでの番号のついたn枚のカードが入っている。
この中から2枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた数のうち最大のものをXとする。ただし、nは$n \geqq 2$を満たす正の整数とする。
また、カードはすべて同形かつ同じ重さとする。

(1−1) kは$2 \leqq k \leqq n$を満たす整数とする。$X \leqq k$となる確率$P(X \leqq k)$を求めよ。

(1−2) kは$2 \leqq k \leqq n$を満たす整数とする。$X=k$となる確率$P(X=k)$を求めよ。

(1−3) Xの期待値を求めよ。

(2) 四角形OABCはOA＝OB＝1，∠AOB＝60°，∠OBC＝90°を満たしている。
BC＝$t\ (t>0)$とおく。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。

(2−1) 内積$\vec{b}\cdot\vec{c}$を求めよ。

(2−2) 内積$\vec{a}\cdot\vec{c}$をtを用いて表せ。

(2−3) ベクトル$\vec{c}$を実数x, yにより$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$と書くとき，$x, y$を$t$を用いて表せ。

(2−4) 線分ACとOBの交点が線分ACの中点となるようなtの値を求めよ。

【解答】

(1) n枚から2枚とる取り出し方は${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$通り

(1−1) $X \leqq k$となるのは1からkまでから2枚取り出せばよいから${}_kC_2=\dfrac{k(k-1)}{2}$通り

よって、求める確率は$P(X \leqq k)=\dfrac{{}_kC_2}{{}_nC_2}=\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$

(1−2) $X=k$となるのはkと1から$k-1$の中から1枚取り出せばよいので、
${}_1C_1 \times {}_{k-1}C_1=k-1$通り

よって、求める確率は$P(X=k)=\dfrac{k-1}{{}_nC_2}=\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$

(1−3) Xの期待値は

$$\sum_{k=2}^{n} k\cdot P(X=k)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$$

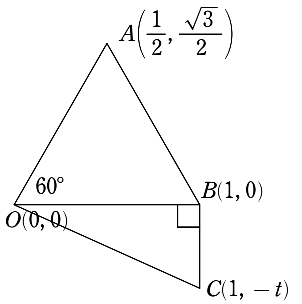
$$=\frac{2}{n(n-1)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{2(n+1)}{3}$$

【別解】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$を用いて、

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)i=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$と計算しても良い。

(2) $O(0,0)$, $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(1,0)$, $C(1,-t)\ (t>0)$とおく。



(2−1)

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1+0\cdot(-t)=1$

(2−2)

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}\cdot1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-t)=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,t)$

(2−3)

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=1$より、$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$より、$\dfrac{1}{2}x+y=1$ …①

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,t)$より、$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,t)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$より、$x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,t)$ …②

①と②より$x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t$，$y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}t$

(2−4)

$\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})=k\vec{b}$ (k:実数)とおける。$\dfrac{1}{2}(x+1)\vec{a}+\dfrac{y}{2}\vec{b}=k\vec{b}$ なので、

$x+1=0 \Leftrightarrow -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t+1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$

a, bは$a+b, ab$が共に整数となるような実数であり，しかも$a+b$は奇数，abは偶数である。次の問いに答えよ。

(1) a^2+b^2は整数であり，しかも奇数であることを示せ。

(2) a^3+b^3は整数であり，しかも奇数であることを示せ。

(3) 任意の自然数nについて，a^n+b^nは整数であり，しかも奇数であることを示せ。

(4) このような実数a, bでいずれも整数でないような例を示せ。

【解答】

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ …①

$a+b, ab$は共に整数だから①は整数で、$a+b$が奇数だから$(a+b)^2$も奇数。
$2ab$が偶数だから①は奇数。

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ …②

$a+b, ab$は共に整数だから②は整数で、$a+b$が奇数だから$(a+b)^3$も奇数。
abが偶数だから$3ab(a+b)$も偶数。従って②は奇数。

(3) 「任意の自然数nについてa^n+b^nが整数であり，しかも奇数である」…(※)
を数学的帰納法で示す。

[I] $n=1$の時。
$a+b$は整数で奇数なので(※)は成立。

[II] $n=2$の時は(2)より(※)は成立。

[III] $n=k, k+1\ (k=1,2,\cdots)$の時，(※)が成り立つと仮定する。
つまり、a^k+b^k，$a^{k+1}+b^{k+1}$が共に整数で奇数と仮定する。
$a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$ …③
a^k+b^k，$a^{k+1}+b^{k+1}$，$a+b$，abは整数だから③は整数。
また、$a^{k+1}+b^{k+1}$と$a+b$は奇数なので、$(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})$は奇数であり，
abは偶数なので$ab(a^k+b^k)$は偶数。従って③は奇数。
以上より、$a^{k+2}+b^{k+2}$は整数で奇数となるから$n=k+2$のときも(※)は成立する。

[I],[II],[III]と数学的帰納法により、題意成立。

(4) $a+b=5$, $ab=2$とする。a, bを解に持つ2次方程式は

$t^2-5t+2=0$なので解の公式より$t=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

よって、$a=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$，$b=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$が例。

$\boxed{3}$

次の各問に答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　不等式 $\log_8(1-x)+\log_{64}(x+2)\geqq\log_4 x$ を解け

(2)　$\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{10}{3}\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$のとき $\sin x+\cos x$ の値を求めよ。

(3)　行列$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b\end{pmatrix}$で表される移動によって，直線$y=3x$上の点$(t,3t)$が実数$t$の値にかかわらずつねに直線$y=3x$上の点に移るための$a,b$の条件を求めよ。

(4)　2次正方行列Aはその逆行列A^{-1}と一致し，$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$を満たしている。

Aを求めよ。

【解答】

(1)　$\log_8(1-x)+\log_{64}(x+2)\geqq\log_4 x$ …①

真数条件は$1-x>0,\ x+2>0,\ x>0$より $0<x<1$ …②

このとき①は

$$\frac{\log_2(1-x)}{\log_2 8}+\frac{\log_2(x+2)}{\log_2 64}\geqq\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\Leftrightarrow\frac{\log_2(1-x)}{3}+\frac{\log_2(x+2)}{6}\geqq\frac{\log_2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(1-x)+\log_2(x+2)\geqq3\log_2 x\Leftrightarrow\log_2(1-x)^2(x+2)\geqq\log_2 x^3$$

$$\Leftrightarrow(1-x)^2(x+2)\geqq x^3\Leftrightarrow x^3-3x+2\geqq x^3\Leftrightarrow x\leqq\frac{2}{3}\ \cdots④$$

①かつ④より $0<x\leqq\dfrac{2}{3}$

【別計算】①の計算は$\log_a M=\log_{a^k}M^k$ を使って

$①\Leftrightarrow\log_{64}(1-x)^2+\log_{64}(x+2)\geqq\log_{64}x^3\Leftrightarrow\log_{64}(1-x)^2(x+2)\geqq\log_{64}x^3$

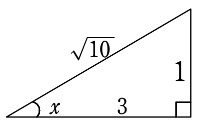
としてもよい。

(2)　$\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{10}{3}$ …①　$\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

$①\Leftrightarrow\tan^2x+1=\dfrac{10}{3}\tan x\Leftrightarrow3\tan^2x-10\tan x+3=0$

$\Leftrightarrow(3\tan x-1)(\tan x-3)=0$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$より、$0<\tan x\leqq1$だから$\tan x=\dfrac{1}{3}$



$\cos x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$なので、$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

(3)　$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(3-2a)t\\(1+2b)t\end{pmatrix}$

これが$y=3x$上へ移るから

$(1+2b)t=3(3-2a)t\Leftrightarrow2(3a+b-4)t=0$ これが任意の t について成立するので

求める条件は$3a+b-4=0\Leftrightarrow b=-3a+4$

(4)　$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ …①

$A=A^{-1}$なので、$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ これにAを左からかけると

$AA^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ …②

①，②をまとめると$A\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}$なので、

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$

次の各問に答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　2つの放物線$C_1:y=x^2-2x+3$，$C_2:y=x^2+2x-1$について，次の問に答えよ。

(1－1)　放物線C_1とC_2に共通な接線の方程式を求めよ。

(1－2)　放物線C_1，C_2，および(1－1)で求めた接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　次の問に答えよ。

(2－1)　$\displaystyle\int_0^\pi\sin^2x\,dx$の値を求めよ。

(2－2)　$\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$の値を求めよ。

(2－3)　$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x+1+k\sin x)^2dx$を最小にする実数$k$の値を求めよ。

(2－4)　(2－3)のIの最小値を求めよ。

【解答】

(1)　C_1：$y=x^2-2x+3=f(x)$とおく。$f'(x)=2x-2$

　C_2：$y=x^2+2x-1=g(x)$とおく。$g'(x)=2x+2$

(1－1)　$(t,f(t))$における接線の式は

$y-(t^2-2t+3)=(2t-2)(x-t)\Longrightarrow y=2(t-1)x-t^2+3$ …①

$(s,g(s))$における接線の式は

$y-(s^2+2s-1)=(2s+2)(x-s)\Longrightarrow y=2(s+1)x-s^2-1$ …②

①と②が一致するから、

$$\begin{cases}2(t-1)=2(s+1)\\-t^2+3=-s^2-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}t=s+2 & \cdots③\\t^2=s^2+4 & \cdots④\end{cases}$$

③を④に代入すると$s=0$，③より$t=2$

②に$s=0$を代入すると共通接線の式は$y=2x-1$

【別解】

①と$y=g(x)$を連立して判別式$=0$でtを決めてもよい。

(1－2)　$f(x)=g(x)$より、$x=1$ (C_1とC_2の交点のx座標)

求める面積をSとすると、

$$S=\int_0^1\{(x^2+2x-1)-(2x-1)\}dx+\int_1^2\{(x^2-2x+3)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_0^1x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(2)

(2－1)

$$\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos2x)dx=\frac{1}{2}\left\{\Big[x\Big]_0^\pi-\frac{1}{2}\Big[\sin2x\Big]_0^\pi\right\}=\frac{\pi}{2}$$

(2－2)

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^\pi=\pi$$

(2－3)

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x+1+k\sin x)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+1+k^2\sin^2x+2x+2k\sin x+2kx\sin x)dx$$

（xと$\sin x$は奇関数で他は偶関数なので）

$$=2\int_0^\pi(x^2+1+k^2\sin^2x+2kx\sin x)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^\pi+2k^2\int_0^\pi\sin^2x\,dx+4k\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3+2\pi+2k^2\cdot\frac{\pi}{2}+4k\cdot\pi=\pi k^2+4\pi k+\frac{2}{3}\pi^3+2\pi$$

(2－4)

$$I=\pi(k+2)^2+\frac{2}{3}\pi^3-2\pi$$

より、$k=-2$の時Iは最小で最小値は$\dfrac{2}{3}\pi^3-2\pi$

【講評】

全て基本から標準の問題で，どの受験生でも類題を経験したことがあると思われる。昭和にしては，非常に易しい問題のセットとなっている。

$\boxed{2}$の記述問題の出来具合が合否を分けると思われる。合格ラインは昨年より大幅に高くなることが予想される。

正規合格には少なくとも90%前後の得点率が欲しい。