Windom　2017年3月4日　昭和大II期(医学部)　解答速報　数学

$\boxed{1}$

(1)　Aさん, Bさんは仲の良い友達である。イベントに二人を誘うとき、Aさんが来る確率は0.5, Bさんが来る確率は0.6であるという。また、Aさんが来るという条件の下でBさんが来る確率は0.9であるという。

(1−1)　Aさん, Bさんが2人とも来る確率を求めよ。

(1−2)　Aさん, Bさんの少なくとも1人が来る確率を求めよ。

(1−3)　Bさんが来るという条件の下でAさんが来る確率を求めよ。

(2)　空間内に2定点A, Bがあり, 原点Oとで三角形をなすとする。空間にある点Pが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$$

を満たしているとき, 動点Pの存在範囲を求め, どのような図形になるか答えよ。

【答】

(1−1)　0.45　(1−2)　0.65　(1−3)　0.75

(2)　三角形OABの重心を中心とし、半径 $=\dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}}{3}$ の球面上

$\boxed{2}$

(1)　ド・モアブルの定理より, $(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos5\theta+i\sin5\theta$ が成り立つ。

この等式の虚数部分を比較することによって、$\dfrac{\sin5\theta}{\sin\theta}$ を $\cos\theta$ の式で表せ。

ただし、答は実数係数の範囲で因数分解した形で答えよ。

(2)　(1)の結果を用いて, 次の式の値を求めよ。

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

(3)　ド・モアブルの定理より, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立つ。

この等式の虚数部分を比較することによって、$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ を $\cos\theta$ の式で表せ。

ただし、答は実数係数の範囲で因数分解した形で答えよ。

(2)　(3)の結果を用いて 次の式の値を n の式で簡潔に表せ。

$$\underbrace{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}_{n-1\text{項の積}}$$

【答】

(1)　$16\left(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{4\pi}{n}\right)$

$16\left(\cos\theta-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\cos\theta-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\cos\theta-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\cos\theta-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$

(2)　$\dfrac{5}{16}$

(3)　$2^{n-1}\left(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

(4)　$\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$\boxed{3}$

(1)　2つの自然数A, Bについて[A*B]はA, Bのうち大きい方の数を小さい方の数で除した余りを表す。例えば[19*8]=3 となる。ただし、A=Bのときは[A*B]=0とする。

(1−1)　$[N_1*41]=5$ となる100以下の自然数 N_1 は全部で何個あるか求めよ。

(1−2)　$[N_2*48]=[N_2*84]$ となる2017以下の自然数 N_2 は全部で何個あるか求めよ。

(2)　正十二面体の辺の数を求めよ。なお, 正十二面体の頂点の数は20である。

(3)　2次方程式 $x^2-(t-7)x+1=0$ の2つの解を α, β とするとき

$$(1-t\alpha+\alpha^2)(1-t\beta+\beta^2)$$

の値を求めよ。

【答】

(1−1)　7個　(1−2)　252個　(2)　30本　(3)　49

$\boxed{4}$

(1)　$\sin\theta+\sin^2\theta=1$ のとき $\cos^2\theta+\cos^8\theta$ の値を求めよ。

(2)　$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=\dfrac{9}{5}$ のとき, x^2y の取りうる範囲を求めよ。

(3)　関数

$$f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$$

の $0<x<\pi$ における最小値を求めよ。

(4)　$0<k<2$ であるとき, $y=-x^2+2x$ と $y=kx$ とで囲まれる図形の面積を S_1,

$y=-x^2+2x$ と $y=kx$ と $x=2$ で囲まれる図形の面積を S_2 とするとき,

S_1+S_2 を最小にする k の値を求めよ。

(5)　整式 $f(x)$ が

$$f(0)=0,\quad xf(x)+\int_x^0 f(t)dt=9x^4-6x^2$$

を満たしている。このとき x 軸と $y=f(x)$ のグラフとで囲まれる部分の面積を求めよ。

【答】

(1)　$3-\sqrt{5}$　(2)　$\dfrac{1}{8}\leqq x^2y\leqq 8$　(3)　$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$　(4)　$2-\sqrt{2}$　(5)　6

$\boxed{5}$

【講評】

昭和の攻略の鍵は小問集合を確実に解くである。

[1] (1), [3] (2), (3), [4] (1),(2),(3),(4),(5)は確実に解かないといけない問題である。

[2]も(1)(2)まではきちんと解けることが望ましい。

[1](2)はOを基準に解き直す。

[2]は $\sin n\theta=0$ の解から $\sin\theta=0$ の解を除いたものが全て解であることを利用して攻略する問題である。

[3](1)は大小関係で場合分けして個数をもとめていきます　　　。