

数 学

2024 年度（令和 6 年度）

入 学 試 験 問 題

受 験 番 号	
---------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 6 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。
- (4) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し、マークしてください。
- (5) 問題用紙のどのページも切り離してはいけません。問題冊子の余白は計算用紙として使用してもかまいません。
- (6) 計算機能や辞書機能、通信機能等をもつ電子機器類全ての使用は禁止します。
使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙は持ち帰ってはいけません。この問題冊子は持ち帰ってください。

2. 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、冊子を開いてはいけません。また、解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

- (1) 問題は 1 , 2 , 3 の 3 つの大問があります。
- (2) 各問題文中の ア , イウ などの には、数値または符号（＋，－）が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答してください。

裏表紙につづく

O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(2 - \sqrt{3}, 1)$ がある。

(1) 線分 OA の長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり、直線 OA と x 軸のなす角を

$\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、 $\alpha = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi$ である。また、直線 OB の方

式は $y = \left(\boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}} \right) x$ であり、2 直線 OA, OB のなす角を

$\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、 $\beta = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \pi$ である。

(2) 点 A を中心として点 O を通る円を K とし、2 直線 OA, OB と円 K の交点で第 1 象限にあるものをそれぞれ C, D とする。線分 OC, OD および短い方の弧 CD で囲まれる領域を S とする。

(i) 領域 S の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ク}}} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \pi$ であり、点 D の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}, \frac{\boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)$$

である。

(ii) 円 K 上の点 C における接線の方程式は

$y = \boxed{\text{ソ}} x + \boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である。また、点 $P(x, y)$ が領域 S を動くとき、 $x + 2y$ の最大値は

$\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}} + \boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$ である。ただし、

$\boxed{\text{テ}} < \boxed{\text{ナ}}$ とする。

(iii) 線分 AC, AD および短い方の弧 CD で囲まれた扇形 ACD を、直線

OD の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \pi \boxed{\text{ネ}}$ である。

$OA = 3$, $OB = 2$, $\cos \angle AOB = \frac{1}{6}$ の平行四辺形 $OACB$ があり,
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は ア であり, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\text{イウ}}$ である。

また, 平行四辺形 $OACB$ の面積は $\sqrt{\text{エオ}}$ である。

(2) 点 O から対角線 AB に垂線を引き交点を D とすると,

$\overrightarrow{OD} = \frac{\text{カ}}{\text{キク}} \vec{a} + \frac{\text{ケ}}{\text{コサ}} \vec{b}$ である。また, 直線 OD と辺 BC の交点を

E とするとき, $BE : EC$ を最も簡単な整数の比で表すと シ : ス である。

(3) (2) のとき, 3 点 O , A , D を通る円を K とし, その中心を F とする。

円 K と直線 OC の交点で O でない方を G , 円 K と直線 DF の交点で D でない方を H , 円 K と直線 OB の交点で O でない方を I とする。このとき,

$\overrightarrow{OG} = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \vec{a} + \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \vec{b}$ であり, 三角形 OAD の面積を S , 五角形

$OHAGI$ の面積を T とすると, $\frac{S}{T} = \frac{\text{ツテ}}{\text{トナニ}}$ である。

自然数 n に対して、定義域を $x \leq 1$ とする 2 つの関数

$$f_n(x) = x(1-x)^n, \quad g_n(x) = x^2(1-x)^n$$

を定める。

(1) $f_2(x)$ の導関数は、

$$f_2'(x) = (x - \boxed{\text{ア}}) (\boxed{\text{イ}} x - \boxed{\text{ウ}})$$

であり、 $f_2(x)$ の極大値は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。また、 $g_2(x)$ の極大値は $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(2) すべての自然数 n に対して、

$$f_n(x) - g_n(x) = f_{n+\boxed{\text{コ}}}(x)$$

が成り立つ。

(3) $f_n(x)$ の導関数は、

$$f_n'(x) = \boxed{\text{サ}} \left\{ (n + \boxed{\text{シ}}) x - \boxed{\text{ス}} \right\} (1-x)^{n-1}$$

であり、 $g_n(x)$ の導関数は、

$$g_n'(x) = \boxed{\text{セ}} \left\{ (n + \boxed{\text{ソ}}) x - \boxed{\text{タ}} \right\} x(1-x)^{n-1}$$

である。

(4) 2 つの曲線 $y = f_n(x)$, $y = g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とすると、

$$S_n = \frac{\boxed{\text{チ}}}{(n + \boxed{\text{ツ}})(n + \boxed{\text{テ}})}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ とする。

また、関数 $f_n(x)$ が極大値をとるときの x の値を p_n とおくと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n S_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕

アイウ

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	●	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数形で解答する場合, 分数の符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。また, それ以上約分できない形で答えてください。

〔例2〕

エオ

 /

カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	●	7	8	9

- (iii) 根号を含む形で解答する場合, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。例えば,

キ

 $\sqrt{\text{ク}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

- (iv) 根号を含む分数形で解答する場合, 例えば

ケ

 +

コ

 $\sqrt{\text{サ}}$ /

シ

 に $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを,

$\frac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\frac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

- (v) 同一の問題文中に

スセ

 などが2度以上現れる場合, 原則として2度目以降は,

スセ

 のように細字で表記します。