Windomの解答速報 東海大学(医)数学

2015・2/2 東海

2014年に比べて易化した。
合格ラインは8割を超えるであろう。

1 (1) ${}_8C_2 \cdot {}_{10}C_3 = \underline{3360}$ ア

(2) $\underline{1}$ イ

(3) (i) $[x^2] = 4$ より

$4 \leqq x^2 < 5$ $\therefore \underline{2 \leqq x < \sqrt{5}}$ ウ

(ii) $[x] \times \left[\frac{5}{x}\right] = 3$ より

$$\begin{cases} [x]=1,\ \left[\frac{5}{x}\right]=3 \text{ のとき} & 1 \leqq x < 2,\ 3 \leqq \frac{5}{x} < 4 & \therefore \frac{5}{4} < x \leqq \frac{5}{3} \\ \left[\frac{5}{x}\right]=1,\ [x]=3 \text{ のとき} & 1 \leqq \frac{5}{x} < 2,\ 3 \leqq x < 4 & \therefore 3 \leqq x < 4 \end{cases}$$

$\therefore \underline{\frac{5}{4} < x \leqq \frac{5}{3},\ 3 \leqq x < 4}$ エ

(4) $\log_2(x-1) + \log_2(x+3) = 2 + 2\log_4 3$

$\log_2(x-1)(x+3) = \log_2 12$

$\therefore x^2 + 2x - 15 = 0$ $\therefore x = -5, 3$

$x > 1$ より

$\underline{x = 3}$ オ

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$\displaystyle = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x\,dx$

$\displaystyle = -\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\Big[\cos^3 x\Big]_0^{\pi}$

$\displaystyle = -(-1-1) + \frac{1}{3}(-1-1) = \underline{\frac{4}{3}}$ カ

$\boxed{2}$

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1 \end{cases}$

(i) $a_2 = \underline{5}$ ア ，$a_3 = \underline{15}$ イ

(ii) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，$b_1 = \underline{4}$ ウ

また、

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2(n+1) + 1 \\ -) & a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1 \\ \hline & b_{n+1} = 2b_n + 2 \end{array}$$

$\underline{b_{n+1} = 2b_n + 2}$ エオ

(iii) $b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 2)$ $\quad \therefore \quad c_{n+1} = 2c_n$

より

$c_n = c_1 \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} = \underline{3 \cdot 2^n}$ ク （初項 $\underline{6}$ カ，公比 $\underline{2}$ キ）

よって

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ （ただし $b_n = 3 \cdot 2^n - 2$ ）

$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^k - 2)$

$= 1 + 3 \cdot \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2(n-1)$

$= 1 + 6(2^{n-1} - 1) - 2(n-1)$

$= \underline{3 \cdot 2^n - 2n - 3}$ ケ

(2) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + n^2 \end{cases}$

$x_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2} = 2a_{n+1} + (n+1)^2 \\ -) & a_{n+1} = 2a_n + n^2 \\ \hline & x_{n+1} = 2x_n + 2n + 1 \end{array}$$

$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = 3 \cdot 2^n - 2n - 3 \end{cases}$

よって

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^k - 2k - 3)$

$= 0 + 3 \cdot \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 3(n-1)$

$= 6(2^{n-1} - 1) - (n-1)n - 3(n-1)$

$= \underline{3 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 3}$ コ

$\boxed{3}$

$a>0 \quad f(x)=e^{ax},\ f'(x)=ae^{ax}$

(1) $x=t$ における接線の方程式は

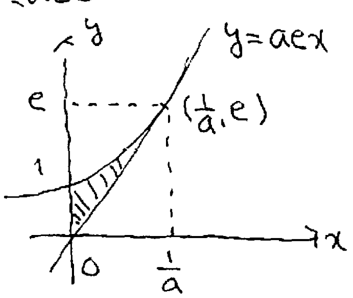
$$y-e^{at}=ae^{at}\cdot(x-t)$$

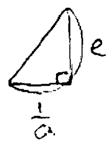
$$\therefore\ \underline{y=ae^{at}\cdot x+(-at+1)e^{at}}\ ア$$

(2) $(0,0)$を代入

$$1-at=0 \quad \therefore\ \underline{t=\frac{1}{a}}\ イ$$

このとき



$$S=\int_0^{\frac{1}{a}}e^{ax}dx-$$ 

$$=\frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot e$$

$$=\frac{1}{a}(e-1)-\frac{e}{2a}=\underline{\frac{1}{2a}(e-2)}\ ウ$$

(3) $$V_x=\int_0^{\frac{1}{a}}\pi(e^{ax})^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot e^2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{2a}\left[e^{2ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{\pi e^2}{3a}$$

$$=\frac{\pi}{2a}(e^2-1)-\frac{\pi e^2}{3a}=\underline{\frac{\pi(e^2-3)}{6a}}\ エ$$

(4) $y=e^{ax}$ より $ax=\log y \quad \therefore\ x=\frac{1}{a}\log y \quad \therefore\ \underline{f^{-1}(x)=y=\frac{1}{a}\log x}\ オ$

(5) $\int_1^e \log x\,dx=\underline{1}\ カ \qquad \int_1^e(\log x)^2dx=\underline{e-2}\ キ$

(6) $$V_y=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot e-\int_1^e\pi x^2dy$$

$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\pi\int_1^e\left(\frac{1}{a}\right)^2(\log x)^2dx=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi}{a^2}(e-2)=\frac{\pi(6-2e)}{3a^2}=\underline{\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}}\ ク$$