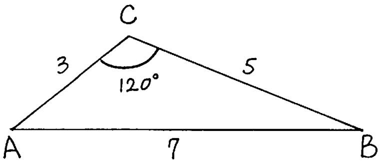
Windomの解答速報 東海大学(医)数学(2日目)

2015 東海 2 日目は
1 日目よりも難易度は高い
でも落ち着いて解けば出来る
はず。7 割は欲しい。

[1] (1)



$\cos C = \underline{-\frac{1}{2}}_{ア}$　より，$\angle C = 120°$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \sin C = \underline{\frac{15\sqrt{3}}{4}}_{イ}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=2$

分子：$\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2+ax+b)=9+3a+b=0$　　$\therefore\ b=-3a-9\ \cdots\cdots①$

このとき

$$与式=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+a+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+a+3)=a+6=2\qquad \therefore\ \underline{a=-4}_{ウ},\ \underline{b=3}_{エ}$$

(3)　$2<\sqrt{6}<3$ より　$\sqrt{6}=2+x$

$\therefore\ 6=(2+x)^2$　　$\therefore\ \underline{x^2+4x-2=0}_{オカ}$

(4)　$\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=3a_n-2 \end{cases}$

$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　　$\therefore\ a_n-1=(4-1)\cdot 3^{n-1}$　　$\therefore\ \underline{a_n=3^n+1}_{キ}$

(5)　$\overrightarrow{OA}=(0,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(-2,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{OC}=(1,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ だから　$\overrightarrow{OC}\perp$ 平面 ABC

よって

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot|\overrightarrow{OC}|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}=\underline{2}_{ク}$$

[2]　P は $(5,\ 0)$，Q は $(0,\ 6)$ から出発

コイン 1 枚

- 表　P は x:+2，Q は y:+1
- うら　P は x:−3，Q は y:−2
- 表が 2 回以上連続　Q は $(0,\ 6)$ に戻る

(1)　5回投げる

表2回　$_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\underline{\frac{5}{16}}_{ア}$

Pは，$+5+2\cdot 2+(-3)\cdot 3=\underline{0}_{イ}$

Qは，

表〇 うら×	〇〇×××	$y=0$
	×〇〇××	$y=2$
	××〇〇×	$y=4$
	×××〇〇	$y=6$
	〇×〇×× ×〇×〇× ××〇×〇	$y=2$
	〇××〇× ×〇××〇 〇×××〇	$y=2$

$y=0$，2，4，6の$\underline{4通り}_{ウ}$

(2)　10回でPが原点　はじめ(5,　0)　→　(0,　0)

$\begin{cases}表 x 回\\ 裏 10-x 回\end{cases}$　$5+2x+(-3)(10-x)=0$

$\therefore\ \underline{x=5回}_{エ}$

このとき　$_{10}C_5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{252}{1024}=\underline{\frac{63}{256}}_{オ}$

(3)　10 回コインを投げるとき，Q が原点　はじめ (0,　6) → (0,　0)

表…○

うら…×

どちらでもよい…△

㋐

△△△△△ ┆ ○○ ┆ ××× ┆　　　$1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

はじめの 5 回　　$y=6$　　$y=0$

㋑

△△○○ ┆ ×××○×○

$y=6$

△△○○ ┆ ××○××○

×○×××○

××○×○×

×○××○×

×○×○××

$6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{6}{256}$

表 x 回

うら $10-x$ 回

$6+1\cdot x+(-2)\cdot(10-x)=0$ とすると，$x=\frac{14}{3}$ →なし

よって，$\frac{1}{32}+\frac{3}{128}=\underline{\frac{7}{128}}$ カ

(4)　10 回コインを投げる，P,　Q ともに原点

P は表 5 回，うら 5 回

㋐のとき，はじめの 5 回は表 3 回，うら 2 回だから　${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{32}=\frac{5}{512}$

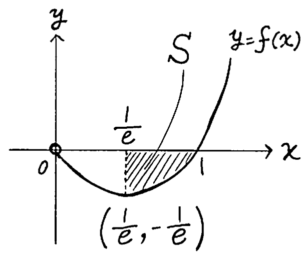
㋑のとき，はじめの 2 回が表 1 回，うら 1 回だから　${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{6}{256}=\frac{3}{256}$

よって

$\frac{5}{512}+\frac{3}{256}=\underline{\frac{11}{512}}$ キ

3 (1)　$f(x)=x\log x \quad (x>0)$

（ｉ）　$f'(x)=\underline{\log x+1}_{ア}$ であり，



x	0		$\frac{1}{e}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

$\underline{x=\frac{1}{e}\text{のとき，Min}-\frac{1}{e}}_{イ，ウ}$

（ii）　$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-x\log x dx=-\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{2}xdx$

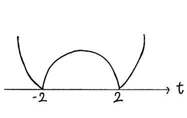
$$=-\left(0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\cdot(-1)\right)+\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}=\underline{\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)}_{エ}$$

(2)　$g(x)=\int_{x}^{x+2}|t^2-4|\,dt \quad (x>0)$

（ｉ）　$g(1)=\int_1^3|t^2-4|\,dt=\int_1^2(-t^2+4)\,dt+\int_2^3(t^2-4)\,dt$



$$=\left[-\frac{t^3}{3}+4t\right]_1^2+\left[\frac{t^3}{3}-4t\right]_2^3$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+4\right)+(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{11}{3}-3-\left(-\frac{16}{3}\right)=\underline{4}_{オ}$$

（ⅱ） $2 \le x$ のとき

$$g(x) = \int_x^{x+2} (t^2 - 4)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 4t\right]_x^{x+2}$$

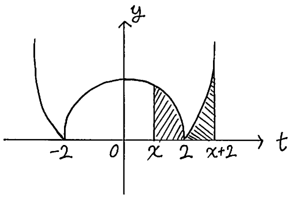
$$= \frac{1}{3}(x+2)^3 - 4(x+2) - \left\{\frac{1}{3}x^3 - 4x\right\}$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 8 - \frac{1}{3}x^3$$

$$= 2x^2 + 4x - \frac{16}{3}$$

$$g'(x) = \underline{4x + 4}_{\text{カ}}$$

（ⅲ） $x < 2$ のとき（ただし $x > 0$)



$$g(x) = \int_x^2 -(t^2 - 4)\,dt + \int_2^{x+2} (t^2 - 4)\,dt$$

$$= -\left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_x^2 + \left[\frac{t^3}{3} - 4t\right]_2^{x+2}$$

$$= -\left\{\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\right\} + \left\{\frac{1}{3}(x+2)^3 - 4(x+2)\right\} - \left\{\frac{8}{3} - 8\right\}$$

$$= -\left(-\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{16}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (4x - 8)\right) - \left(-\frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + \frac{16}{3}$$

$$g'(x) = \underline{2x^2 + 4x - 4}_{\text{キ}}$$

（ⅳ） $g'(x) = \begin{cases} 4x + 4 & (2 \le x) \\ 2x^2 + 4x - 4 & (0 < x < 2) \end{cases}$

より

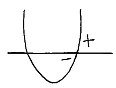
$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x - \dfrac{16}{3} & (2 \le x) \\ \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + \dfrac{16}{3} & (0 < x < 2) \end{cases}$$

x	0		2		$-1+\sqrt{3}$	
g'		$+$		$-$	0	$+$
	$\left(\frac{16}{3}\right)$	↗		↘		↗

$g' = 2(x^2 + 2x - 2)$

$g' = 0$ より

$x = -1 \pm \sqrt{3}$



ここに

$$\begin{array}{r} 2x + 2 \\ x^2 + 2x - 2 \,\big)\, \overline{2x^3 + 6x^2 - 12x + 16} \\ \underline{2x^3 + 4x^2 - 4x } \\ 2x^2 - 8x + 16 \\ \underline{2x^2 + 4x - 4} \\ -12x + 20 \end{array}$$

$$2x^3+6x^2-12x+16=(x^2+2x-2)(2x+2)+(-12x+20)$$

$$\therefore \quad 3g(x)=\frac{1}{2}g'(x)\cdot(2x+2)+(-12x+20)$$

$$\therefore \quad g(x)=\frac{1}{6}g'(x)\cdot(2x+2)+\left(-4x+\frac{20}{3}\right)$$

よって　$g\left(-1+\sqrt{3}\right)=-4\left(-1+\sqrt{3}\right)+\frac{20}{3}=\frac{32}{3}-4\sqrt{3}$

$\underline{x=-1+\sqrt{3}}_{ク}$ のとき $\underline{\text{Min}\,\frac{32}{3}-4\sqrt{3}}_{ケ}$