Windomの解答速報 東京慈恵会医科大学数学

1．　次の□にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1)　1から4までの番号をつけた4個の箱と，1から4までの番号を付けた4枚のカードがある。最初は，1，3番の箱に赤玉が1個ずつ，2，4番の箱に白玉が1個ずつ入っている。4枚のカードから同時に2枚を取り出し，取り出したカードの番号と同じ番号の2つの箱に入っている玉を入れかえた後，カードをもとに戻す。この試行を2回繰り返すとき，1，3番の箱に赤玉，2，4番の箱に白玉が入っている確率は$\boxed{（ア）}$であり，1，2番の箱に赤玉，3，4番の箱に白玉が入っている確率は$\boxed{（イ）}$である。

(2)　複素数$z=\cos\theta+i\sin\theta+\sqrt{3}(i\cos\theta-\sin\theta)$において，$\theta$が$0\leq\theta\leq\frac{2}{3}\pi$の範囲を動くとき，$\left|\sqrt{2}z-1+i\right|$の最大値は$\boxed{（ウ）}$である。ただし，$i$は虚数単位とする。

$\boxed{\text{解答}}$・・

(1)　全事象　${}_4C_2^2=36$通り

（ア）　2回とも同じカードを取る　6通り

または(1，3)→(2，4)　か

(2，4)→(1，3)を取る2通りより

$\frac{6+2}{36}=\underline{\frac{2}{9}}$

（イ）　(1，2)→(1，3)　か　(1，3)→(2，3)

か　(2，3)→(1，2)　か　(2，3)→(3，4)

か　(2，4)→(2，3)　か　(3，4)→(2，4)

の6通りの取り方があるので，

$\frac{6}{36}=\underline{\frac{1}{6}}$

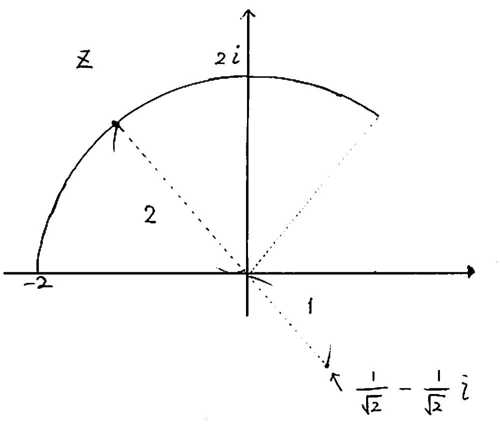
(2)　$z=2\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

と変形できる。$|z|=2$

$0\leq\theta\leq\frac{2}{3}\pi$　より　$\frac{\pi}{3}\leq\arg z\leq\pi$をとる。

zと$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$の距離　$\left|z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right|$

の最大は



上図のときで3となるので

$\sqrt{2}\left|z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right|=\left|\sqrt{2}z-1+i\right|$

の最大値は　$\underline{3\sqrt{2}}$

2． xy 平面上において，半径 2 の円板が x 軸に接しながら正の方向にすべることなく回転するとき，円板上の定点 P が描く曲線 C_1 を考える。時刻 $t=0$ における円板の中心 D の位置を点 $(0,\ 2)$，P の位置を点 $(0,\ 1)$ とする。時刻 t において D が点 $(t,\ 2)$ の位置にあるように円板が回転していくとき，次の問いに答えよ。問い(1)(ｉ)では $\boxed{\quad}$ にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

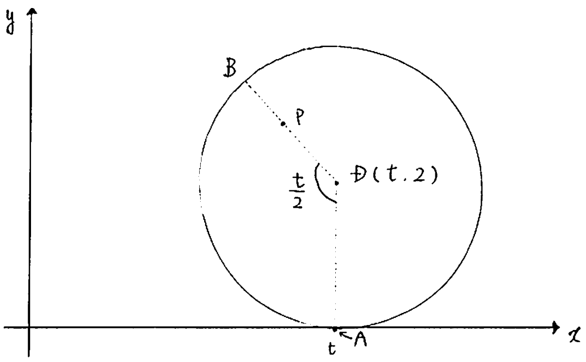
(1) (ｉ) 時刻 t における P の座標 $(x,\ y)$ を t を用いて表すと，$(x,\ y)=\left(\boxed{\text{(エ)}},\ \boxed{\text{(オ)}}\right)$ である。

(ⅱ) $x,\ y$ の t に関する増減をそれぞれ調べよ。

(2) 時刻 t に対応する点 $P(x,\ y)$ における C_1 の法線 l が x と交わる点を M とし，M が線分 PQ の中点となるような l 上の点を Q とおく。Q の座標を t を用いて表せ。ただし，$t=0$ のときは Q を点 $(0,\ -1)$ とする。

(3) 点 Q が描く曲線を C_2 とする。2 曲線 C_1，C_2 と y 軸，および $t=3\pi$ のときの(2)における法線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ ・・



(1)(ｉ) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=t$ より $\angle \mathrm{ADB}=\dfrac{t}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

$=(t,\ 2)+\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}\right)\right\}$

$=\underline{\left(t-\sin\dfrac{t}{2},\ 2-\cos\dfrac{t}{2}\right)}=(x,\ y)$

(ⅱ) $\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ は常に正より x は単調増加

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{2}$ より 増減表は

t	$(4m-4)\pi$		$(4m-2)\pi$		$4m\pi$
$\dfrac{dy}{dt}$	0	＋	0	−	0
y		↗		↘	

となる。（m は自然数）

(2) l の傾きは $-\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{dy}{dt}}=\dfrac{2\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}$ より

l の方程式は

$y-\left(2-\cos\dfrac{t}{2}\right)$

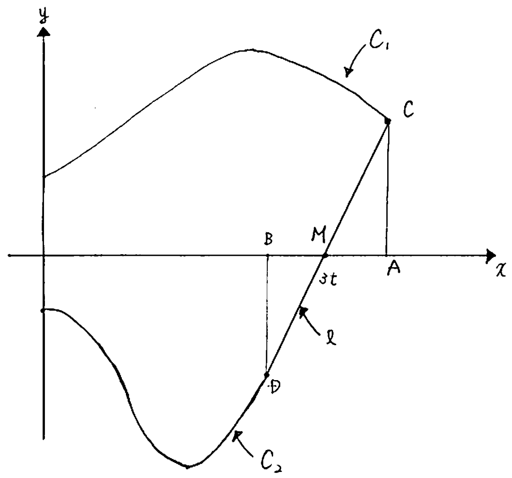
$=\dfrac{2-\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\left\{x-\left(t-\sin\dfrac{t}{2}\right)\right\}$

に $y=0$ 代入すると，$x=t$ より $\mathrm{M}(t,\ 0)$

PQ の中点が M より

$\underline{\mathrm{Q}\left(t+\sin\dfrac{t}{2},\ -2+\cos\dfrac{t}{2}\right)}$

(3)



△AMC＝△DMB より求める面積は

C_1 と線分 AC と x,　y 軸で囲まれた面積 S_1 と C_2 と線分 BD と x,　y 軸で囲まれた面積 S_2 の合計より

$$S = S_1 + S_2$$

$$= \int_0^{3\pi} \left(2 - \cos\frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$+ \int_0^{3\pi} \left(2 - \cos\frac{t}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \underline{12\pi + 4}$$

3． aを３以上の奇数の定数とする。方程式$ax-2y=1$をみたす自然数の組$(x,\ \ y)$について，次の問いに答えよ。

(1) 組$(x,\ \ y)$は無数に存在することを示せ。

(2) 組$(x,\ \ y)$の列$(x_1,\ \ y_1)$，$(x_2,\ \ y_2)$，$\cdots$，$(x_n,\ \ y_n)$，$\cdots$が，条件「$n\geqq 2$についてx_nは，x_1，x_2，$\cdots$，x_{n-1}のどの項とも異なる」をみたすとする。このとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+\cdots+\frac{y_n}{x_n}\right)$を$a$を用いて表せ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$を利用してよい。

$\boxed{\text{解答}}$・・

(1) $ax-2y=1 \iff y=\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2}$ より

$x=2n-1$（nは自然数）ならば

$y=na-\dfrac{1}{2}(a+1)$は自然数　より

$(x,\ \ y)$の解は無数に存在する。

(2) $\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{1}{x_n}\left(\dfrac{a}{2}x_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2x_n}$ より

$$\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+\cdots+\frac{y_n}{x_n}\right)$$
$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\cdots\cdots①$$
となる。

ここで　$x=2m$（mは自然数）ならば

yは自然数とならないので,

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$
$$\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$\leqq\frac{1}{n}\left(1+\int_1^n\frac{1}{2x-1}dx\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}\log(2n-1)\right)$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{\log 2n}{2n}+\frac{1}{2n}\log\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

また明らかに

$$0\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

はさみ打ちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=0$$

①より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+\cdots+\frac{y_n}{x_n}\right)=\underline{\frac{a}{2}}$$

4． 正四面体 ABCD があり，三角形 ABD 上に$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$をみたす点 P をとる。三角形 ACD の重心を G，直線 GP と平面 ABC の交点を Q とする。線分 AB 上の点 R を，三角形 PQR が PQ を斜辺とする直角三角形となるようにとるとき，線分 AR，AB の長さの比の値$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}$を求めよ。

解答

正四面体の一辺の長さをa，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

Q は直線 GP 上より

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{GP}}$ とかける。式を変形して

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AG}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$=(1-k)\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)+k\left(\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)$$
$$=\frac{k}{8}\vec{b}+\frac{1}{3}(1-k)\vec{c}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}k\right)\vec{d}$$

Q は平面 ABC 上より$\vec{d}$の係数が 0 となればよいので

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}k=0 \leftrightarrow k=4$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$$

$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}=t$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\vec{b}$ とかける

条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}=0$$

$$\leftrightarrow\quad \left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}-\vec{c}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{8}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\right\}=0$$

$$\leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{8}-t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{d}$$
$$-\left(\frac{1}{8}-t\right)\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}=0\cdots\cdots①$$

ここで　$|\vec{b}|^2=a^2$

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$$

を①に代入し整理すると，

$$16t^2-4t-1=0\quad\leftrightarrow\quad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{8}$$

ここで　$0\leq t\leq 1$ より

$$t=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}=\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{8}}$$

講評

2 はサイクロイド系の問題で似た様な問題は解いた事があると思われる。面積はxの媒介変数で置換するのがポイント。

3 は整数の証明問題で，x_1，x_2，$\cdots$，x_n がどれでも良い事をきちんとはさみ打ちの原理

で攻略する説明ができているかどうかは差が付くところ。
　一昨年，昨年に比べるとやや難易度は下がったと思われるが，7 割くらいは欲しい。