2016 年度　順天堂大学(医)入試　数学　解答速報

Ⅰ

(1)

ア	2	イ	4	ウ	2
エ	8	オ	6	カ	1
キ	8	ク	5	ケ	2
コ	9				

(2)

ア	1	イ	5	ウ	2
エ	5	オ	6	カ	5
キ	1	ク	1	ケ	2
コ	5	サ	1	シ	1
ス	3	セ	1	ソ	1
タ	3				

(3)

ア	3	イ	3	ウ	2
エ	3	オ	9	カ	0
キ	-	ク	1	ケ	d
コ	-	サ	3	シ	b
ス	8	セ	2	ソ	7

(4)

ア	1	イ	-	ウ	9
エ	2	オ	3	カ	2
キ	6	ク	3	ケ	2
コ	2	サ	3	シ	3
ス	2	セ	2		

Ⅱ

ア	1	イ	5	ウ	2
エ	1	オ	5	カ	4
キ	1	ク	0	ケ	2
コ	5	サ	2	シ	─
ス	1	セ	5	ソ	2
タ	1	チ	2	ツ	5
テ	2	ト	3	ナ	3
ニ	3	ヌ	0	ネ	6
ノ	5	ハ	6	ヒ	3
フ	3	ヘ	1	ホ	5
マ	1	ミ	2	ム	5
メ	3	モ	1	ヤ	5
ユ	5	ヨ	5	ラ	1
リ	2				

Ⅲ

(1)　$|x+y|\leq|x|+|y|$・・・・・・①を示す

両辺≥ 0だから①の両辺を平方しても同値

①$\Leftrightarrow |x+y|^2\leq(|x|+|y|)^2$

$(x+y)^2\leq(|x|+|y|)^2$

$x^2+2xy+y^2\leq x^2+2|x||y|+y^2$

$2(|xy|-xy)\geq 0$・・・・・・②

②を示せば①を示したことになる。

ア) $xy\geq 0$のとき②の左辺は

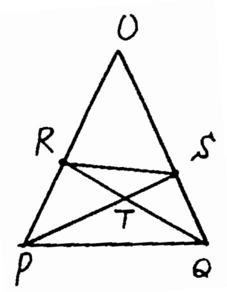
$2(xy-xy)=0$

イ) $xy\leq 0$のとき②の左辺は

$2(-xy-xy)=-2xy\geq 0$

いずれにしても，②が成立するので，①は示された。

(2)　RQ と PS の交点を T とする。



三角の成立条件から

$\mathrm{TP}+\mathrm{TQ}\geq\mathrm{PQ}$・・・・・・③

$\mathrm{TS}+\mathrm{TR}\geq\mathrm{RS}$・・・・・・④

③＋④より

$(\mathrm{TP}+\mathrm{TS})+(\mathrm{TQ}+\mathrm{TR})\geq\mathrm{PQ}+\mathrm{RS}$

$\mathrm{PS}+\mathrm{QR}\geq\mathrm{PQ}+\mathrm{RS}$

(3)　A，B，C，D が任意のとき

(ⅰ) AB と CD が四角形の辺となる場合(図 1)

(ⅱ) AB と CD が四角形の対角線となる場合(図 2)

(ⅲ) D が△ABC の内部にある場合(図 3)

が考えられる。

(ⅰ)の時，対角線 AC と BD の交点を E とする。

(2)の結果から

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{BD}$が成立するので

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$は

成立する。

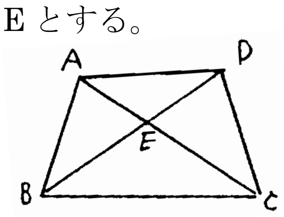


図 1

(ⅱ)の時

$\mathrm{AB}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$

$\mathrm{AB}\leq\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$

$\mathrm{CD}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{AD}$

$\mathrm{CD}\leq\mathrm{BC}+\mathrm{BD}$

すべてを加えて

$2(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\leq 2(\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC})$

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$

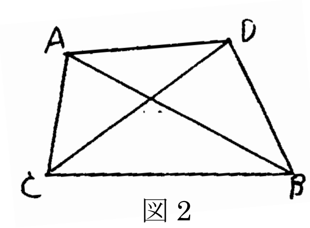


図 2

(ⅲ)の時

$\mathrm{AB}\leq\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$

$\mathrm{CD}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$

加えて

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\leq\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$

いずれにしても題意の不等式は

成立する。

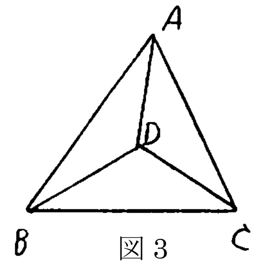
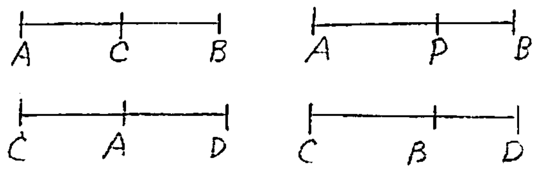


図 3

(4)　等号成立は条件の厳しい(3)の(ⅱ)の場合を考えれば

よい。各々の等号成立条件は，



3 点「A，C，B」「A，D，B」

「C，A，D」「C，B，D」

がこの順で同一直線上に並ぶときだから，

4 点 A，B，C，D が重なるときである。

講評

I

(1)　場合の数

(2)　正五角形の伸展曲線の動点の長さ，面積，さらに
正 n 角形に拡張した場合の動点の長さ，面積

(3)　定積分関数の微分

(4)　4 次関数の最大・最小

II

正二十面体の体積

III

三角不等式の証明及び辺の長さに関する不等式の証明

例年通り，I の 4 題，特に(4)は重くなっている。IIは誘導に乗って埋めていけばよい。IIIは順天特有の証明問題。

70 分の試験時間に対して，問題のボリュームがあるので，ボーダーは 65%位と思われる。

2016 年度　順天堂大学(医)入試　数学　解答速報【解説】

I

(1)

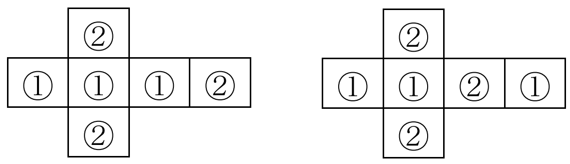
(ア)　1 つの色を 1 面に，もう 1 つの色を 5 面に塗る場合, 赤と青のどちらの色を 1 面に塗るかで, 2 通りある。

(イ)　1 つの色を 2 面に，もう 1 つの色を 4 面に塗る場合は，どちらの色を 2 面に塗るかで 2 通り，さらに 2

面に塗る色が対面にあるか，隣り合うかで 2 通りあるので，

$2\times2=4$ 通りある。

(ウ)　2 つの色をそれぞれ 3 面に塗る場合，



(赤を①，青を②)

2 通りある。

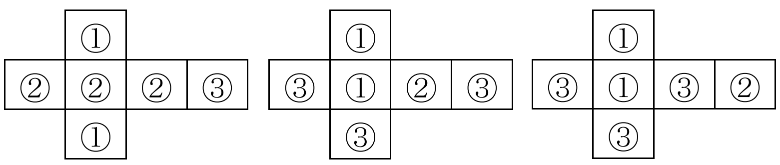
(エ)　　合計 $2+4+2=8$ 通り

赤，青，黄の 3 色を使う場合。

(オ)　　3 つの色を 1 面—1 面—4 面に塗る場合，4 面に塗る色をどれにするかで，3 通り。1 面—1 面に塗る色が, 対面になるか, 隣になるかの 2 通りあるので,

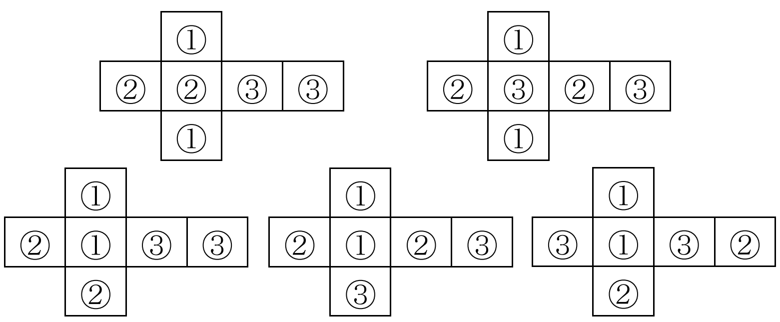
$3\times2=6$ 通り。

(カキ)　3 つの色を 1 面—2 面—3 面に塗る場合，どれを 3 面の色にするかで 3 通り。どれを 2 面の色にするかで 2 通りある。その塗り方は 3 通り。



従って，$3\times2\times3=18$ 通り。

(ク)　3 つの色を 2 面ずつ塗る場合，



5 通りある。

(ケコ)　合計 $6+18+5=29$ 通りある。

(2)　動点 P は始め半径 $\frac{1}{5}l$，中心角 $\frac{2}{5}\pi$ の弧を描く。また，弧の中心角は $\frac{2}{5}\pi$ と変化しない。このとき，動点 F の動

く距離は

$$\frac{l}{5}\times\frac{2}{5}\pi+\frac{2l}{5}\times\frac{2\pi}{5}+\frac{3l}{5}\times\frac{2\pi}{5}+\frac{4l}{5}\times\frac{2\pi}{5}+\frac{5l}{5}\times\frac{2\pi}{5}$$

$$=\frac{2\pi}{5}\times\frac{l}{5}\times(1+2+3+4+5)$$

$$=\frac{6}{5}l\pi$$

糸が掃く面積は

$$\frac{2\pi}{5}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{5}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2l}{5}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3l}{5}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{4l}{5}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{5l}{5}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{l^2}{2\cdot5^2}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$$

$$=\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{l^2}{2\cdot5^2}\times55$$

$$=\frac{11}{21}l^2\pi$$

同様のことを正 n 角形で行うと，糸の移動距離は

$\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{l}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{n}l\pi$ だから $a=1$

$\frac{n+1}{n}l\pi\xrightarrow[(n\to\infty)]{}l\pi$ となるので $f=1$

面積は

$$\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{l^2}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}l^2\pi$$

だから　$c=\frac{1}{3}$

$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}l^2\pi\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\frac{1}{3}l^2\pi$ となるので

$g=\frac{1}{3}$

(3)　$y=f(x)=x^3-x$

$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値　$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

極小値　$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

従って，$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ で極値 $\frac{\mp2\sqrt{3}}{9}$ を持つ。

$y=f(x)$ と $y=t$ を連立させて，

$x^3-x=t$

$x^3-x-t=0$ ・・・・・・(※)

(※)の 3 解が $p(t)$，$q(t)$，$r(t)$

（$p(t)<q(t)<r(t)$）

解と係数の関係から

$$p(t)+q(t)+r(t)=0 \cdots\cdots (\#)$$
$$p(t)q(t)+q(t)r(t)+r(t)p(t)=-1$$

次に

$$G(t)=\int_{p(t)}^{r(t)}|f(x)-t|dx$$

$p(t)=p,\quad q(t)=q,\quad r(t)=r$ とおくと,

$$G(t)=\int_p^q\left(f(x)-t\right)dx-\int_q^r\left(f(x)-t\right)dx$$
$$=\int_p^q f(x)dx-\int_q^r f(x)\,dx-t(q-p)+t(r-q)$$
$$=\int_p^q f(x)\,dx-\int_q^r f(x)\,dx+(r+p-2q)t$$
$$G'(t)=f(q)\cdot q'-f(p)\cdot p'-f(r)\cdot r'+f(q)\cdot q'$$
$$+(r'+p'-2q')t+(r+p-2q)$$
$$=t\cdot q'-t\cdot p'-t\cdot r'+t\cdot q'$$
$$+(r'+p'-2q')t+(r+p-2q)$$

$$\left[\begin{array}{c} p,\quad q,\quad r\text{は}f(x)=t\text{の解だから,} \\ f(p)=f(q)=f(r)=t \end{array}\right]$$

$$G'(t)=r+p-2q=(r-q)-(q-p)$$

（選択肢　d）

$(\#)$より　$p+q+r=0$ だから $p+r=-q$

従って，$G'(t)=-q-2q=-3q$

（選択肢　b）

$G'(t)=1$ となるとき，$-3q=1\quad q=-\dfrac{1}{3}$

(※)より　$t=x^3-x=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$

(4)　$f(x)=ax^4+bx^2+c$　（$a>0$ とする）

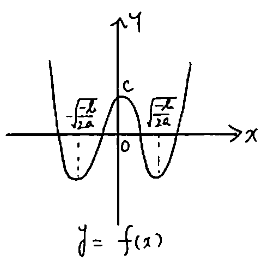
$$f'(x)=4ax^3+2bx$$
$$=4ax\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$$

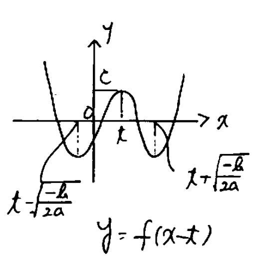
$\dfrac{b}{2a}\geq 0$ とすると，$x=0$ でのみ極値を持つので，

$y=f(x-t)$［$y=f(x)$ を x 方向へ t だけ平行移動したもの］は，$3\leq x\leq 6$ のとき，$x=3,\ 6,\ t$ が最大，最小と

なり，不適。従って，$\dfrac{b}{2a}<0$

$$f'(x)=4ax\left(x-\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)$$





$\dfrac{3}{2}\leq t\leq\dfrac{15}{2}$ で最小となるので,

$$\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{-b}{2a}}=3\cdots\cdots ①$$
$$\frac{15}{2}-\sqrt{\frac{-b}{2a}}=6\cdots\cdots ②$$

①−②より　$2\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}=3$

$$\sqrt{\frac{-b}{2a}}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{-b}{a}=\frac{9}{2}\cdots\cdots ③$$

最大値が $\dfrac{3}{2}$ だから　$c=\dfrac{3}{2}$

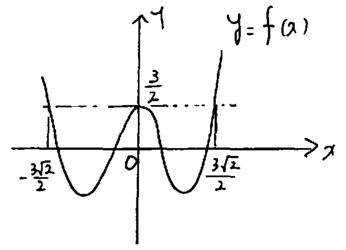
最小値が $-\dfrac{57}{16}$ だから

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)=a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+\frac{3}{2}=-\frac{57}{16}$$
$$\frac{81}{16}a+\frac{9}{4}b=-\frac{81}{16}$$
$$9a+4b=-9$$

③より　$b=-\dfrac{9}{2}a$ を代入して

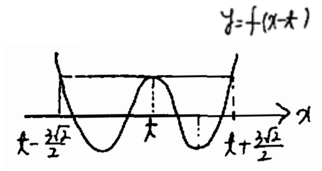
$$9a-18a=-9$$
$$a=1,\quad b=-\frac{9}{2}$$

従って，$f(x)=x^4-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$



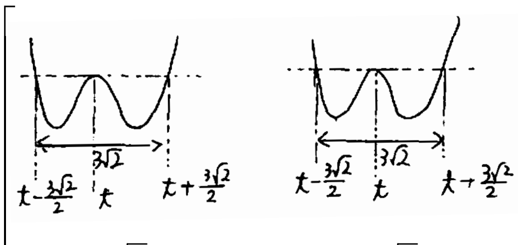
また，$f(x)=\dfrac{3}{2}$ となるのは

$$x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$
$$x^2\left(x^2-\frac{9}{2}\right)=0$$
$$x=0,\ \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$\alpha\leq t\leq\beta$ で最大となるので

$$t+\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\Rightarrow t=6-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\alpha$$
$$t-\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\Rightarrow t=3+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\beta$$

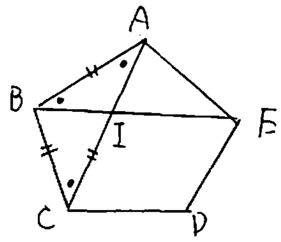


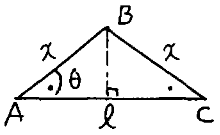
$t+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\geq 6$　かつ　$t-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leq 3$

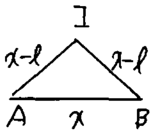
$$\Rightarrow\quad 6-\frac{3\sqrt{2}}{2}\leq t\leq 3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ⅱ

正五角形の ABCDE で
AB = x， AC = l とする。
△BCA と△IAB の相似から







$$x : l = (x-l) : x$$
$$l^2 - xl - x^2 = 0$$
$l > 0$ より $\quad l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$

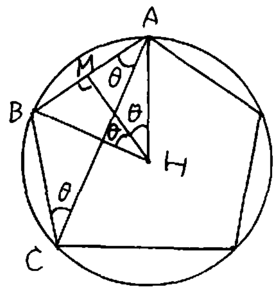
つまり $\quad \mathrm{AC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{AB}$

$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とおくと

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}l}{x} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}x}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BCA} = \theta$
$\angle\mathrm{AHB} = 2\theta$ （中心角）

△HAB は二等辺三角形だから，AB の中点を M とすると，



$\mathrm{AM} = \mathrm{AH}\sin\theta$
$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AM} = 2(\sin\theta)\mathrm{AH}$

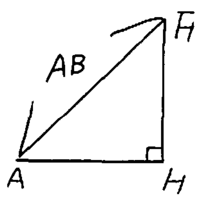
ここで $\quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

従って $\quad \mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\mathrm{AH} \cdots\cdots$(※)

次に，H を通り，円 H を含む平面に垂直な直線上に FA = AB となる様に F をとると

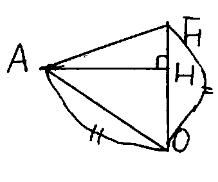
$$\mathrm{FA}^2 = \mathrm{AB}^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}\mathrm{AH}^2$$
$$\mathrm{FH}^2 = \mathrm{FA}^2 - \mathrm{AH}^2$$
$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{4}\mathrm{AH}^2 - \mathrm{AH}^2$$
$$= \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4} - 1\right)\mathrm{AH}^2$$
$$= \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\mathrm{AH}^2 = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}\mathrm{AH}^2$$
$$\mathrm{FH} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{AH} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{AH}$$



さらに FH 上に FO=AO となる様に O をとる。

$$\mathrm{OH} = \mathrm{OF} - \mathrm{FH}$$
$$= \mathrm{OA} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{AH}$$

$\mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2 = \mathrm{OA}^2$ だから



$$\left(\mathrm{OA} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{AH}\right)^2 + \mathrm{AH}^2 = \mathrm{OA}^2$$
$$\mathrm{OA}^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AH} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AH}^2 = \mathrm{OA}^2$$
$$-\left(\sqrt{5}-1\right)\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AH} + \left\{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1\right\}\mathrm{AH}^2 = 0$$

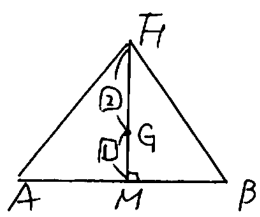
$$\mathrm{OA} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}+1}{\sqrt{5}-1}\mathrm{AH} = \frac{5-\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}\mathrm{AH}$$
$$= \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{AH}$$

従って $\quad \mathrm{OH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{AH} - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{AH} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AH}$

また $\quad \mathrm{FO} = \mathrm{OA} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{AH}$

さらに　△FAB の重心を G とする。
図の対称性から　FA = FB だから
△FAB は正三角形

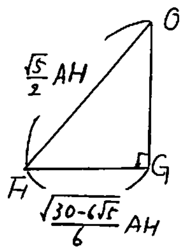
$$\mathrm{FM} = \sqrt{3}\mathrm{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}$$



$$\mathrm{FG} = \frac{2}{3}\mathrm{FM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{AB}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\mathrm{AH}$$
$$= \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{6}\mathrm{AH}$$

球の中心 O から△FAB へ垂線の足が G となるので

$$\mathrm{OG}^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{30-6\sqrt{5}}{36}\right)\mathrm{AH}^2$$
$$= \frac{15+6\sqrt{5}}{36}\mathrm{AH}^2$$
$$= \frac{5+2\sqrt{5}}{12}\mathrm{AH}^2$$
$$\mathrm{OG} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}\mathrm{AH}$$



ここで(※)より $\quad \mathrm{AH} = \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\mathrm{AB}$ だから

$$\mathrm{OG} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\mathrm{AB}$$
$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}}{\sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}\mathrm{AB}$$
$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}}\mathrm{AB}$$
$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{6}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)}\sqrt{\sqrt{5}+1}}\mathrm{AB}$$

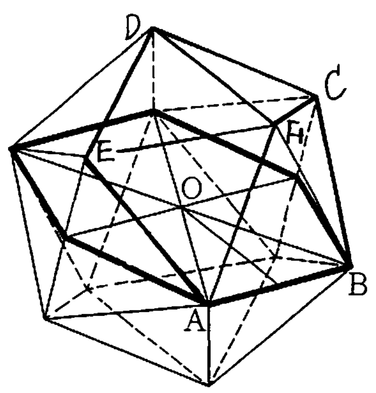
$$=\frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{6}\sqrt{4}}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{\sqrt{\left(7+3\sqrt{5}\right)\cdot 6}}{12}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{\sqrt{42+2\sqrt{27\cdot 15}}}{12}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{27}+\sqrt{15}\right)^2}}{12}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\mathrm{AB}$$

表面積は正三角形が 20 個あるので,

$$20\times\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}^2\times\sin 60^\circ=5\sqrt{3}\mathrm{AB}^2$$

体積は

$$\frac{1}{3}\cdot 5\sqrt{3}\mathrm{AB}^2\cdot\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{3\cdot 12}\mathrm{AB}^3$$
$$=\frac{15\cdot 3+3\cdot 5\sqrt{5}}{3\cdot 12}\mathrm{AB}^3$$
$$=\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\mathrm{AB}^3$$



Ⅲ

(1)　$|x+y|\le|x|+|y|$ ……①を示す

両辺≥ 0 だから①の両辺を平方しても同値

$(x+y)^2\le(|x|+|y|)^2$ を示す。

$(|x|+|y|)^2-(x+y)^2$

$=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)$

$=2(|xy|-xy)$ ……②

(ア) $xy\ge 0$ (x と y が同符号)のとき

②$=2(xy-xy)=0$

(イ) $xy<0$ (x と y が異符号)のとき

②$=2(-xy-xy)=-4xy>0$

いずれにしても　②≥ 0

従って　①が成立する。

等号は x と y が同符号のとき成立。

(2)　RQ と PS の交点を T とする。

三角の成立条件から

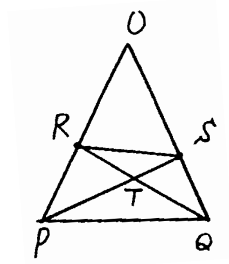
$\mathrm{TP}+\mathrm{TQ}\ge\mathrm{PQ}$ ……③

$\mathrm{TS}+\mathrm{TR}\ge\mathrm{RS}$ ……④

③＋④より

$(\mathrm{TP}+\mathrm{TS})+(\mathrm{TQ}+\mathrm{TR})\ge\mathrm{PQ}+\mathrm{RS}$

$\mathrm{PS}+\mathrm{QR}\ge\mathrm{PQ}+\mathrm{RS}$



(3)　A，B，C，D が任意のとき

(ⅰ) AB，CD が四角形の辺となるとき(図 1)

(ⅱ) AB と CD が四角形の対角線となるとき(図 2)

(ⅲ) D が△ABC の内部にあるとき(図 3)

が考えられる。

(ⅰ)の場合

AC と BD の交点を E とする。

(2)の結果から

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\le\mathrm{AC}+\mathrm{BD}$

が成立するので

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\le\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$

が成立する。

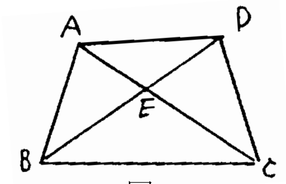


図 1

(ⅱ)の場合

$\mathrm{AB}\le\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$

$\mathrm{AB}\le\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$

$\mathrm{CD}\le\mathrm{AC}+\mathrm{AD}$

$\mathrm{CD}\le\mathrm{BC}+\mathrm{BD}$

すべてを加えて

$2(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\le 2(\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC})$

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\le\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$

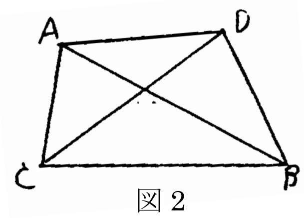


図 2

(ⅲ)の場合

$\mathrm{AB}\le\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$

$\mathrm{CD}\le\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$　(明らか)

加えて

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\le\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$

いずれにしても題意の不等式は

成立する。

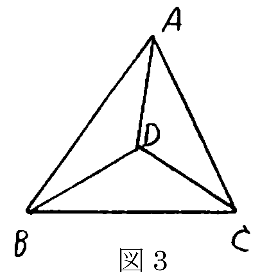
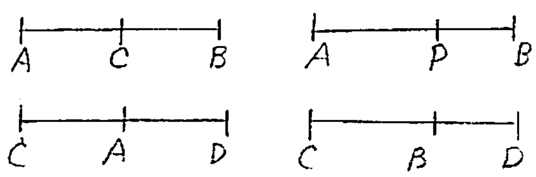


図 3

(4)　等号成立は条件の厳しい(3)の(ⅱ)の場合を考えれば

よい。各々の等号成立条件は,



3 点「A，C，B」「A，D，B」

「C，A，D」「C，B，D」

が同一直線上にこの順で点が並ぶときだから,

4 点 A，B，C，D が重なるとき。