Windomの解答速報 日本大学(医学部) 数学

【問題】

1

(1)

$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$の整数部分を$a$、小数部分を$b$とするとき、

$a=\boxed{1}\boxed{2}$, $b=\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}+\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{6}$である。

(2)

kを定数とするとき、xの方程式$kx^2-(k+1)x+k=0$が異なる2つの実数解をもつためのkの値の範囲は

$-\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{8}}<k<\boxed{9}$または$\boxed{10}<k<\boxed{11}$である。

(3)

三角形ABCは$AB=5,\ CA=2\sqrt{3},\ \angle B=30°$を満たしている。このとき、

$\sin C=\dfrac{\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14}\boxed{15}}$であり、三角形$ABC$の外接円の半径は$\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}$である。

(4)

青玉2個、白玉3個、赤玉5個の合計10個の玉が入っている袋から玉を1個取り出し、色を調べてもとに戻すことを4回続けて行うとき、4回目に2度目の赤玉が出る確率は

$\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}\boxed{20}}$である。

2

(1)

$x=1+2i$が方程式$x^3+ax^2-9x+b=0$の解であるとする。ただし、$a,\ b$は実数であり、iは虚数単位とする。このとき$a=\boxed{21}$, $b=\boxed{22}\boxed{23}$であり、この方程式の実数解は$x=-\boxed{24}$である。

(2)

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$とする。$y=3\sin^2\theta-5\cos\theta\sin\theta-2\cos^2\theta$とおくとき、$y$の最大値は$\boxed{25}$、

最小値は$\dfrac{\boxed{26}-\boxed{27}\sqrt{\boxed{28}}}{\boxed{29}}$である。

(3)

正数$x,\ y$(ただし、$x\fallingdotseq 1,\ y\fallingdotseq 1$)はつぎの2つの式を満たすとする。

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2\\ xy=3^{126}\end{cases}$$

このとき、xは$\boxed{30}\boxed{31}$桁の数である。ただし$\log_{10}3=0.4771$とする。

(4)

数列$\{a_n\}$を$a_1=3\sqrt{3}$, $a^3{}_{n+1}=a_n$, $(n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$により定める。

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k$とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$である。

3

$AB=1,\ AC=\sqrt{2},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}$を満たす三角形$ABC$の外接円の中心を$O$とする。以下の問に答えなさい。

(1) $BC=\sqrt{\boxed{34}}$であり、三角形ABCの面積は$\dfrac{\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{36}}$である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{\boxed{37}}{\boxed{38}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{39}}{\boxed{40}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$である。

(3) 外接円O上に点RをARとBCが垂直になるように選ぶ。ただし、RはAとは異なるとする。このとき、

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\boxed{41}\boxed{42}}{\boxed{43}\boxed{44}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}\boxed{47}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

であり、四角形$ABRC$の面積は$\dfrac{\boxed{48}}{\boxed{49}\boxed{50}}\sqrt{\boxed{51}}$である。

4

$k>1$とする。xy平面上において連立不等式$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqq y\leqq k\cos x$により定まる領域をRとする。Rのうち$y\geqq 1$の部分の面積をS_1、また$y\leqq 1$の部分の面積をS_2とする。

以下の問に答えなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\dfrac{kS_2}{S_1}$を求めなさい。

(2) $k\cos x=1$の解を$x=t$とするとき、$t=f(k)$とおく。このとき、S_2-S_1をfを用いてkの関数として表しなさい。また、S_2-S_1の最大値を与えるkの値とそのときの最大値を求めなさい。

5

aは正の定数とする。2つの曲線

$$\begin{cases}y=\dfrac{a}{e}x^2 & \cdots\cdots①\\ y=2a\log_e x & \cdots\cdots②\end{cases}$$

を考える。ただしeは自然対数の底である。以下の問に答えなさい。

(1) 曲線①と曲線②はただ1つの点を共有し、かつその共通点において共通の接線lをもつことを示し、lの方程式を求めなさい

(2) (1)のl、曲線①およびy軸に囲まれた図形をy軸のまわりに1回転させてできる立体の体積をV_1、また、(1)のl、曲線②およびx軸で囲まれた図形をx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積をV_2とする。V_1およびV_2を求めなさい。さらに$V_1=V_2$のときのaの値を求めなさい。

【答】

1

(1) $a=17\quad b=4\sqrt{3}+\sqrt{5}-9$ (2) $-\dfrac{1}{3}<k<0,\ 0<k<1$

(3) $\sin C=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ 外接円の半径$=2\sqrt{3}$ (4) $\dfrac{3}{16}$

2

(1) $a=5\quad b=35$ 実数解 -7 (2) 最大値$=3$ 最小値$=\dfrac{1-5\sqrt{2}}{2}$

(3) 31桁 (4) $\dfrac{9}{4}$

3

(1) $\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{15}{14}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{14}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ □ABCDの面積$=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$

4

(1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{\pi}{3}$

5

(1) 証明は略 接線の式は $y=\dfrac{2a}{\sqrt{e}}x-a$

(2) $V_1=\dfrac{e}{6}\pi a\quad V_2=\dfrac{48-29\sqrt{e}}{6}\pi a^2\quad a=\dfrac{e}{48-29\sqrt{e}}$

【解説】

1

(1) 分母の有利化をすると、

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{5}-1}=(2+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+1)=8+4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

$$\fallingdotseq 8+4\times 1.73+2.23=17.15$$

よって、整数部分$=a=17$

小数部分$=(8+4\sqrt{3}+\sqrt{5})-17=4\sqrt{3}+\sqrt{5}-9$

(2) $kx^2-(k+1)x+k=0$ が異なる2つの実数解を持つ条件は

$k\fallingdotseq 0$ …① かつ 判別式$=D>0$

となる。

$D=(k+1)^2-4k^2=-3k^2+2k+1>0$

$\Leftrightarrow\ 3k^2-2k-1<0\Leftrightarrow(3k+1)(k-1)<0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<k<1$ …②

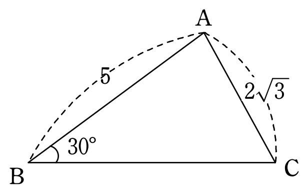
①かつ②より、求める条件は$-\frac{1}{3}<k<0,\ 0<k<1$

(3) 正弦定理より、

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{5}{\sin C}\Leftrightarrow \sin C=\frac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$

外接円の半径をRとおくと、再び正弦定理より、

$2R=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}\Leftrightarrow R=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$



(4) 一回の試行で取った玉が赤である確率は$P_R=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$であり、そうでない確率は

$P_{\overline{R}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$である。

4回目に2回目の赤を引く場合は、1回目から3回目で1回赤を取り、4回目が赤ならばよい。

${}_3C_1\cdot P_R\cdot {P_{\overline{R}}}^2\times P_R=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

2

(1)(前半) $x^3+ax^2-9x+b=0$ …①

$x=1+2i$ より、$x-1=2i$両辺を二乗して

$x^2-2x+1=-4\Leftrightarrow x^2-2x+5=0$

となる。x^3の係数と定数項に留意すると①の左辺は$(x^2-2x+5)\left(x+\frac{b}{5}\right)$と因数分解できる。

$x^3+ax^2-9x+b=(x^2-2x+5)\left(x+\frac{b}{5}\right)=x^3+\left(-2+\frac{1}{5}b\right)x^2+\left(5-\frac{2}{5}b\right)x+b$

となるので、係数を比較すると、

$$\begin{cases}a=-2+\frac{1}{5}b \cdots ②\\ -9=5-\frac{2}{5}b \cdots ③\end{cases}$$

となる。③より、$b=(5+9)\cdot\frac{5}{2}=35$ となり、②に代入して$a=-2+7=5$ を得る。

(後半) 実数解は $x+\frac{b}{5}=x+7=0$ の解なので、$x=-7$

【別解】$x^3+ax^2-9x+b=0$ …①

は実係数の方程式なので、$1+2i$ が解ならば、$1-2i$ も解である。残り1つの実数解をαとおくと、①に対して解と係数の関係より、

$$\begin{cases}(1+2i)+(1-2i)+\alpha=-a\\(1+2i)(1-2i)+(1+2i)\alpha+(1-2i)\alpha=-9\\(1+2i)(1-2i)\alpha=-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-(2+\alpha) \cdots ②\\2\alpha+5=-9 \quad\cdots ③\\b=-5\alpha \quad\cdots ④\end{cases}$$

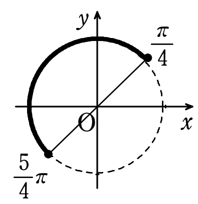
となる。③より、$\alpha=\frac{-9-5}{2}=-7$ これを②と④に代入すると

$$\begin{cases}a=-(2-7)=5\\b=-5\cdot(-7)=35\end{cases}$$

となる。

(2) $y=3\sin^2x-5\sin x\cos x-2\cos^2x=\frac{3}{2}(1-\cos 2x)-\frac{5}{2}\sin 2x-\frac{2}{2}(1+\cos 2x)$

$=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}(\sin 2x+\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$



$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より、$\frac{\pi}{4}\leqq 2x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ゆえ、

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin 2x\leqq 1$ である。

最大になるのは、$\sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$のときで

最大値$=\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3$

$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$ より、$x=\frac{\pi}{2}$の時である。

最小になるのは$\sin 2x=1$のときで

最小値$=\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\frac{1-5\sqrt{2}}{2}$

$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ より、$x=\frac{\pi}{8}$の時である。

(3) $\log_x y+\log_y x=2$ …①　　$xy=3^{126}$ …②

とする。①の真数条件と底の条件より、

$x>0,\ x\fallingdotseq 1,\ y>0,\ y\fallingdotseq 1$ …③

であり、

① $\Leftrightarrow \log_x y+\frac{1}{\log_x y}=2\Leftrightarrow(\log_x y)^2-2\log_x y+1=0$

$\Leftrightarrow(\log_x y-1)^2=0\Leftrightarrow\log_x y=1\Leftrightarrow y=x$

となる。これを②に代入すると、$x^2=3^{126}$ で③に注意すると $x=3^{63}$ となる。

$\log_{10}x=\log_{10}3^{63}=63\log_{10}3=63\cdot 0.4771=30.0573$

よって、$30<\log_{10}x<31\Leftrightarrow 10^{30}<x<10^{31}$ ゆえ、xは31桁。

(4) $a_1=3\sqrt{3}$, ${a_{n+1}}^3=a_n$ に対して底が3の対数をとると、

$\log_3 a_1=\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

$\log_3 {a_{n+1}}^3=\log_3 a_n\Leftrightarrow 3\log_3 a_{n+1}=\log_3 a_n\Leftrightarrow\ \log_3 a_{n+1}=\frac{1}{3}\log_3 a_n$

となるので、数列$\{\log_3 a_n\}$は初項が$\frac{3}{2}$、公比$\frac{1}{3}$の等比数列となる。

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}$$

3

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{2},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$ …①

(1) △ABCで余弦定理より、

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\mathrm{A}=1+2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1+2-2\cdot\frac{1}{2}=2$

$\mathrm{BC}>0$より、$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$となる。また、

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (α,β: 実数)とおく。①を用いると

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\Leftrightarrow 2(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$\Leftrightarrow 2\alpha|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=1$ …②

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\Leftrightarrow 2(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$\Leftrightarrow 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\beta|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\Leftrightarrow\alpha+4\beta=2$ …③

②を③に代入して、$\alpha+4(1-2\alpha)=2\Leftrightarrow -7\alpha+2=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{2}{7}$

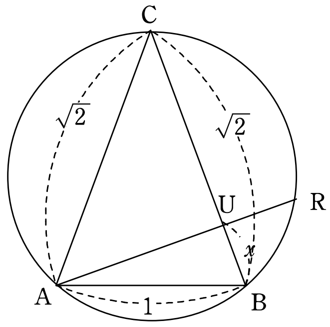
これを②に代入して $\frac{4}{7}+\beta=1\Leftrightarrow\beta=\frac{3}{7}$ よって、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3)(前半)　BCとARの交点をUとし、BU$=x$とおく。

△ABUと△ACUで三平方の定理より、

$$\mathrm{AU}^2=1^2-x^2=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{4}$$



よって、UC$=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$となる。

BU:UC$=\frac{\sqrt{2}}{4}:\frac{3}{4}\sqrt{2}=1:3$より、

$$\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots④$$

となる。また、AU$^2=1^2-x^2=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ より、AU$=\frac{\sqrt{14}}{4}$となり、

方ベキの定理：AU・UR$=$BU・UC より、

$$\frac{\sqrt{14}}{4}\mathrm{UR}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{2}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow \mathrm{UR}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{28}$$

よって、AR$=\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{3\sqrt{14}}{28}=\frac{10\sqrt{14}}{28}$ …⑤

$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AU}}=\frac{\frac{10\sqrt{14}}{28}}{\frac{\sqrt{14}}{4}}=\frac{10}{7}$と④より、

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{10}{7}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{15}{14}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{14}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(後半)　⑤を用いると、

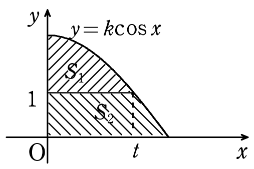
$$\square\mathrm{ABRC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AR}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{10\sqrt{14}}{28}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$

4

領域Rの面積をSとすると、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\cos x\,dx=k\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=k$$

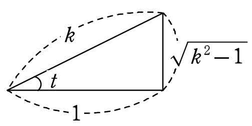
である。



(1)　$k\cos x=1$ の解を $t\ (0<t<\frac{\pi}{2})$とする。

$$\cos t=\frac{1}{k}\ \cdots①$$

より



$$\sin t=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\cdots②$$

となる(右図参照)。

$$S_1=\int_0^t(k\cos x-1)dx=k\Big[\sin x\Big]_0^t-\Big[x\Big]_0^t=k\sin t-t\quad(\text{②を用いると})$$

$$=\sqrt{k^2-1}-t$$

となる。$S_2=S-S_1$なので、

$$\frac{kS_2}{S_1}=\frac{k(k-S_1)}{S_1}=\frac{k}{S_1}\cdot(k-S_1)\cdots③$$

となる。$k\to\infty$ の時、①, ② より、$\cos t\to 0+0$ $\sin t\to 0+0$ なので、$t\to\frac{\pi}{2}-0$となる。

従って、

$$\frac{k}{S_1}=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}-t}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}-\frac{t}{k}}\to\frac{1}{1-0}=1\quad(k\to\infty)\cdots④$$

$$k-S_1=(k+t)-\sqrt{k^2-1}=\frac{(k+t)^2-(k^2-1)}{(k+t)+\sqrt{k^2-1}}=\frac{2tk+t^2+1}{(k+t)+\sqrt{k^2-1}}$$

$$=\frac{2t+\frac{t^2+1}{k}}{\left(1+\frac{t}{k}\right)+\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}\to\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}+0}{1+1}=\frac{\pi}{2}\quad(k\to\infty)\cdots⑤$$

③, ④, ⑤より、$\lim_{k\to\infty}\frac{kS_2}{S_1}=\frac{\pi}{2}$

(2)　$S_2-S_1=(S-S_1)-S_1=S-2S_1=k-2\left(\sqrt{k^2-1}-t\right)$

$$=k-2\sqrt{k^2-1}+2t=k-2\sqrt{k^2-1}+2f(k)\qquad(\because t=f(k)\text{ より})$$

$g(k)=k-2\sqrt{k^2-1}+2f(k)$ とおく。

$\cos t=\frac{1}{k}$をkで微分すると、

$$-\sin t\cdot\frac{dt}{dk}=-\frac{1}{k^2}\Leftrightarrow\frac{dt}{dk}=\frac{1}{k^2\sin t}=\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}\quad(\because\text{②より})$$

ゆえに、$f'(k)=\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$に注意して$g'(k)$を計算すると

$$g'(k)=1-2\cdot\frac{2k}{2\sqrt{k^2-1}}+2f'(k)=\frac{k\sqrt{k^2-1}-2k^2+2}{k\sqrt{k^2-1}}$$

$$=\frac{k\sqrt{k^2-1}-2(k^2-1)}{k\sqrt{k^2-1}}=\frac{k-2\sqrt{k^2-1}}{k}=\frac{k^2-4(k^2-1)}{k\left(k+2\sqrt{k^2-1}\right)}$$

$$=\frac{-3k^2+4}{k\left(k+2\sqrt{k^2-1}\right)}=\frac{-(\sqrt{3}k+2)(\sqrt{3}k-2)}{k\left(k+2\sqrt{k^2-1}\right)}$$

となるので、$g(k)$の増減表は以下の通り。

k	1	…	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	…
$g'(k)$	×	+	0	−
$g(k)$		↗	極大	↘

$k=\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき、$g(k)$は極大かつ最大。

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t=1\Leftrightarrow\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より、$t=\frac{\pi}{6}$なので、最大値は

$$g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-2\sqrt{\frac{4}{3}-1}+2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

5

$f(x)=\frac{a}{e}x^2,\ g(x)=2a\log x\ (a>0)$ とおく。

(1)　$F(x)=f(x)-g(x)=\frac{a}{e}x^2-2a\log x\ (x>0)$ とおく。

$$F'(x)=\frac{2ax}{e}-\frac{2a}{x}=\frac{2ax^2-2ae}{ex}=\frac{2a(x^2-e)}{ex}=\frac{2a(x+\sqrt{e})(x-\sqrt{e})}{ex}$$

$F(x)$の増減表は以下の通り。

x	(0)	…	$\sqrt{e}$	…
$F'(x)$		−	0	+
$F(x)$		↘	極小	↗

$F(x)$は$x=\sqrt{e}$ で極小かつ最小で

$$\text{最小値}=F(\sqrt{e})=\frac{a}{e}\cdot e-2a\cdot\frac{1}{2}=0$$

従って、$F(x)\geqq 0$ であり、等号成立は$x=\sqrt{e}$に限る。

このとき、$f(\sqrt{e})=g(\sqrt{e})=a$ より、共有点は$(\sqrt{e}, a)$に限る。

$f'(x)=\frac{2ax}{e}$ より、$f'(\sqrt{e})=\frac{2a\sqrt{e}}{e}=\frac{2a}{\sqrt{e}}$　　$g'(a)=\frac{2a}{x}$ より、$g'(\sqrt{e})=\frac{2a}{\sqrt{e}}$

よって、$(\sqrt{e}, a)$における$y=f(x)$, $y=g(x)$の接線の傾きは共に$\frac{2a}{\sqrt{e}}$となるので

接線は共通である。この共通接線の式は

$$y=\frac{2a}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})+a\Leftrightarrow y=\frac{2a}{\sqrt{e}}x-a$$

(2)　V_1 について

$y=f(x)$ と接線と y 軸で囲まれた図形は図1の斜線部分である。これを y 軸の周りに回転してできる立体の体積は

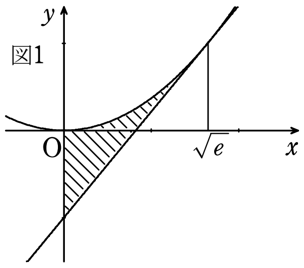


図1

$$V_1=2\pi\int_0^{\sqrt{e}} x\left\{f(x)-\left(\frac{2a}{\sqrt{e}}x-a\right)\right\}dx$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{e}} x\left\{\frac{a}{e}x^2-\left(\frac{2a}{\sqrt{e}}x-a\right)\right\}dx$$

$$=\frac{2\pi a}{e}\int_0^{\sqrt{e}} x(x-\sqrt{e})^2dx$$

$$=\frac{2\pi a}{e}\cdot\frac{1}{12}(\sqrt{e}-0)^4=\frac{e}{6}\pi a$$

V_2 について

$y=g(x)$ と接線と x 軸で囲まれた図形は図2の斜線部分である。これを x 軸の周りに回転してできる立体の体積は

接線を回転させてできる円錐から図3の斜線部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を引いたものである。

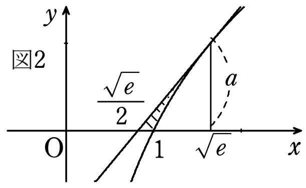


図2

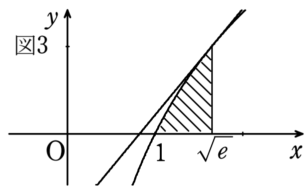


図3

$y=\dfrac{2a}{\sqrt{e}}x-a$ に $y=0$ を代入すると、

$$\frac{2a}{\sqrt{e}}x=a \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{e}}{2}\ (\text{接線の}x\text{切片})$$

$$\text{円錐の体積}=U_1=\frac{\pi}{3}\cdot a^2\cdot\left(\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{2}\right)=\frac{1}{6}\pi a^2$$

図3の斜線の部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積は

$$U_2=\pi\int_1^{\sqrt{e}} g(x)^2dx=4\pi a^2\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx$$

$$\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\left\{\left(\frac{\sqrt{e}}{2}-\sqrt{e}\right)-(0-1)\right\}=\frac{5}{4}\sqrt{e}-2$$

よって、

$$U_2=4\pi a^2\left(\frac{5}{4}\sqrt{e}-2\right)=(5\sqrt{e}-8)\pi a^2$$

となる。ゆえに、

$$V_2=U_1-U_2=\frac{1}{6}\pi a^2-(5\sqrt{e}-8)\pi a^2=\frac{48-29\sqrt{e}}{6}\pi a^2$$

(後半)　$V_1=V_2$ より、

$$\frac{e}{6}\pi a=\frac{48-29\sqrt{e}}{6}\pi a^2 \Leftrightarrow a=\frac{e}{48-29\sqrt{e}}$$

総評

昨年と同様な出題形式で
[1][2][3]はマーク式[4][5]は記述式となっている。
出題内容は
[1]
(1) 式の計算
(2)二次方程式の異なる２つの実数解を持つ条件
(3)三角比
(4)確率
[2]
(1)三次方程式の係数決定と残りの実数解を
求める
(2)三角関数の最大最小
(3)桁数計算
(4)無限等比級数の問題
[3]平面ベクトルの問題
外心のベクトル。円に内接する四角形の頂点のベクトルと四角形の面積
[4]曲線と直線の囲む図形の面積と極限。
面積の差の最大値
[5]２曲線の共通接線と回転体の体積に関する問題。

[3]の(3)は方ベキの定理の利用がポイント。
[4]は考えにくい問題で解きにくい問題である。
[5]は共通接線の話や回転体の体積の話で、
典型的な問題で類題はいままでに何回か解いた経験があるが計算が汚く答もきれいとはいえない。
試験時間と計算量、難易度(昨年よりは難化)を
考えると、60%前後が合格ラインと思われる。

2016年度
昭和大学医学部Ⅱ期入試
解答速報
やります!

昭和Ⅱ期

昭和大学医学部Ⅱ期 ファイナルトライアウト

起死回生の48時間！
昭和Ⅱ期攻略への即戦対応！

講座概要

英語トライアウト 9時間

読解、発音、文法、会話文などさまざまな形式で出題されるため、この対処がまず第一です。読解は医療、生物を中心にしたものが多く、標準より若干難しい。医療系を軸にして、やや高度な内容の文章を読み解くトレーニングが必要です。また、難度の高い単語がふくまれることもあり、語彙力をつけるとともに、文中から類推する力が要求されます。語彙力強化は入試前日まで習慣的に実施すること。

数学トライアウト18時間

大問4題で大部分が結果のみ記入する形式です。小問集合は基本的、標準的な問題が多く、まずは教科書レベルの問題を繰り返し演習して、確実に得点できる力を養います。記述式の問題は微積、数列、確率などが頻出であり、やや難度の高い問題もありますが、近年は標準的な問題が多い。最後まで解き切る力が合否を分けるため、「ごっつい問題」にもアタックして、抵抗力をつけていきたい。

化学トライアウト 9時間

記述式が主で、全体的に難易度が高い。計算問題が多く、化学式を書かせる問題、論述問題も出題されます。細かい知識や計算力の問題トレーニングも視野にいれて、総合的に速習していきたい。教科書以上の知識を身につけた上で、高度な問題の演習が必須になるため、取りこぼしなく8割の得点力を目指します。

生物トライアウト 12時間

ついにあの鬼の穴埋め問題が消滅し、見かけ上は他大学と同じになりました。でも、ハイレベルな医学の知識を要する小問が多数含まれており、簡単になったわけではありません。中には、医学生に課す問題では？ と思うものも。たとえば次のような問題です。

①B細胞として末梢に出て行くためには分化の過程でどのような条件が必要か、20字以内で答えなさい。(2011Ⅰ期)
②ツベルクリン液を接種した皮膚に発赤が出来る機序を20字以内で書きなさい。(2011Ⅱ期)
③ツベルクリン液を接種した皮膚に硬結が出来る機序を20字以内で書きなさい。(2011Ⅱ期)

①を抗体遺伝子の再編成、②をマクロファージの集合、③をコラーゲンなどで説明するような答案ではダメです。なぜだかわかりますか？　このような問題に対し、正しい解答を提示し、論理的に解説・指導することは簡単ではありません。やはり、専門予備校であるウインダムに頼るべきです。

物理トライアウト 12時間

計算過程や理由を書かせる問題が多く、論述問題も出題されます。見慣れない形式の問題が出題されることもあり、物理を根本的に理解するとともに、過去問を研究し、さまざまな問題の演習に取り組み、ダントツブッチギリの満点教科を目指します!

本講座は記述式の難関、昭和大学医学部Ⅱ期試験を突破するためのファイナルプランです。難関医大とはいえ、標準⇒発展へのアプローチを集中学習することで、十分に一次突破の成算があります。

当日は、昭和特化型の『演習問題トライアル』と『講義トライアル』を繰り返し、「つまずき所」を明確にするとともに、特に重要教科と考えられる数学に対しては3講師を配置して、18時間かけてかたよりなく総合的にトレーニングし、昭和Ⅱ期へのコンディションを整えていきます。

『演習問題トライアル』+『講義トライアル』=補強箇所・つまずき所を確認修正
計算ミスなどのケアレスミスも矯正

英語数学どちらがカギ?

英語の平均点は最高点が80点であっても、その最低点は50点だったりと、さほど上下に広がりがありませんが、数学の場合90点の高得点をはじき出す受験生もいれば、ケアレスミスの連発で20点程度の受験生もいます。よって、数学のほうが得点分布の開きが大きく、いかに数学の失点を防ぎ、問題を解き切るかがキーとなりそうです。かといって、英語や理科で大幅に失点すれば、数学の得点力だけではカバーしきれません。得意教科で落とさず、数学で勝負をかける! これが昭和Ⅱ期攻略のポイントでしょう。

ウィンダム昭和Ⅱ期受験担当より…

君たちは起死回生という言葉をご存知でしょうか。負けるとわかっている戦いに勝利を見出せる姿勢・態勢が起死回生なのです。歴史的にもひよどり越え戦い、桶狭間の戦い、関が原の戦いなど、情報力と判断力、時の勢いを利用して死地より生を勝ち取った事実は多い。よって医大受験生が「起死回生・昭和Ⅱ期合格」を狙うのであれば、「自分の学力を改めて認識する」という情報力と「残された時間でなにをするのが妥当か」という判断力と、「決めたら必ずやり遂げてやる」という時の勢いが必要になります。

また、私立医大受験の場合、よほどの優秀者でもない限り、希望する結果に恵まれることは稀でしょう。つまり出来なかったと思った医学部に合格し、出来たと思った医学部へ不合格。医学部を諦めたと思ったら入学し、精魂はてるまで勉強したのにもかかわらず、結果に恵まれず他学部へいく。まことに神のみぞ知る運命のいたずらではあります。

結局、上昇気流に乗っている受験生は油断をしてはならないし、下降ぎみの受験生であっても極端に悲観する必要もありません。ただし、日々、何かを見極めることは必要でしょう。それは勉強法であれ、補強箇所であれ、自分の悪癖(計算ミス)であれ、最後の一日まで「昭和Ⅱ期までにこれだけは変わった!」というものが実感できれば、自ずと合格への道が開けると確信しています。

起死回生の48時間！

昭和大学医学部進学 江頭 あゆみさん

昭和大学医学部進学 中川 美星子さん

昭和大学医学部進学 安達 聖くん

昭和大学医学部進学 蕗田 淳平くん

開講日時： 2月18日(木)～3月2日(水)のベ48指導時間
英語9時間、数学18時間、化学9時間、生物12時間、物理12時間

対　　象： 昭和大学医学部Ⅱ期受験者

特　　典： 一次合格者には二次対策を実施します。
講習期間中、自習室をご利用いただけます。

昭和大学医学部Ⅱ期入試 解答速報
当日実施された入試問題について、解答速報を実施します。ホームページでご覧いただけます。

スケジュール

日	曜	9:30～12:40(90分×2)	13:30～16:40(90分×2)
2月18日	木	昭和Ⅱ期数学トライアル Ⅰ	昭和Ⅱ期生物/物理トライアル Ⅰ
2月19日	金	昭和Ⅱ期数学トライアル Ⅱ	昭和Ⅱ期生物/物理トライアル Ⅱ
2月20日	土	昭和Ⅱ期生物/物理トライアル Ⅲ	昭和Ⅱ期生物/物理トライアル Ⅳ
2月21日	日	（埼玉医科大学後期二次試験）	
2月22日	月		昭和Ⅱ期化学トライアル Ⅰ
2月23日	火	昭和Ⅱ期英語トライアル Ⅰ	昭和Ⅱ期数学トライアル Ⅲ
2月24日	水	（国公立大学受験者移動日）	
2月25日	木	（国公立大学二次試験）	
2月26日	金	（国公立大学二次試験）	
2月27日	土	昭和Ⅱ期化学トライアル Ⅱ	昭和Ⅱ期数学トライアル Ⅵ
2月28日	日		
2月29日	月	昭和Ⅱ期英語トライアル Ⅱ	昭和Ⅱ期数学トライアル Ⅴ
3月1日	火	昭和Ⅱ期英語トライアル Ⅲ	昭和Ⅱ期数学トライアル Ⅵ
3月2日	水		昭和Ⅱ期化学トライアル Ⅲ
3月5日	土	2016年度 昭和大学医学部Ⅱ期試験	

申　込　要　項

1. 下記申込書に必要事項を記入して、郵送、FAXしてください。
2. 受講費用　178,000円（税込）48指導時間
3. 下記の口座に受講費用を振り込んでいただき、申込は完了となります。なお、講座を欠席されたことによる受講料の返金はできませんので、ご了承下さい。

三井住友銀行　渋谷駅前支店
〈普通預金〉口座番号:2740761　口座名:カ)ウインダム

4. 即戦対応授業となりますので、講義の当日はそのまま来校してください。予習の必要はありません。

キリトリ

昭和大学医学部Ⅱ期ファイナルトライアウト申込書

フリガナ	
氏　名 男・女	
住　所 〒	
在籍・出身高校	卒業年度（卒業生のみ）
連絡先 Tel	選択科目 いずれかに○ 生物・物理