2018年度 日本医科大学入試 数学 解答速報

2018 日本医科大学 数学解答

Ⅰ

3解を $4,\ 4r,\ \frac{4}{r}\ (r\neq 0)$ とおく

解と係数の関係から

$4+4r+\frac{4}{r}=-6$

$2r^2+5r+2=0$

$(2r+1)(r+2)=0$

$r=-\frac{1}{2}$ とすると $4r=-2,\ \frac{4}{r}=-2$ となり，

条件に反するので $r\neq-\frac{1}{2}$ だから

$r=-2$

このとき他の解は $\begin{cases}4r=-8\\ \frac{4}{r}=-2\end{cases}$

また解と係数の関係から

$-p=4(-8)+4(-2)+(-8)(-2)=-24$

$\Longrightarrow p=24$

$q=4(-8)(-2)=64$

Ⅱ

$A(a,a^2)\ B(b,b^2)\ C(c,c^2)$ とおく

(問1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b-a\\ b^2-a^2\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}c-a\\ c^2-a^2\end{pmatrix}$

$S=\frac{1}{2}\left|(b-a)(c^2-a^2)-(b^2-a^2)(c-a)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|(b-a)(c-a)\{(c+a)-(b+a)\}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$

(問2)(問3)

6枚のカードから3枚取り出すので

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 通りある

その各々について S を調べる

1−2−3 $S=1$

1−2−4 $S=3$

1−2−5 $S=6$

1−2−6 $S=10$

1−3−4 $S=3$

1−3−5 $S=8$

1−3−6 $S=15$

1−4−5 $S=6$

1−4−6 $S=15$

1−5−6 $S=10$

2−3−4 $S=1$

2−3−5 $S=3$

2−3−6 $S=6$

2−4−5 $S=3$

2−4−6 $S=8$

2−5−6 $S=6$

3−4−5 $S=1$

3−4−6 $S=3$

3−5−6 $S=3$

4−5−6 $S=1$

以上から 最小値 1

最大値 15

S が偶数となる確率は $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

Ⅲ

$f(x)=\log(x+1)+\underline{\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt}$ ……①

—— で $x-t=u$ とおくと $\frac{du}{dt}=-1\to dt=-du$

t	$0\to x$
u	$x\to 0$

—— $=\int_x^0 f(u)\sin(x-u)(-du)$

$=\int_0^x f(u)(\sin x\cos u-\cos x\sin u)\,du$

$=\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du$

①は

$f(x)=\log(x+1)+\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du$ ……②

②の両辺を x で微分

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+f(x)\sin x\cos x$

$\quad+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du-f(x)\sin x\cos x$

$=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du$ ……③

再度，両辺を x で微分

また，$r^2=4\cos^2\theta$，Qの偏角は2θだから

Q$(4\cos^2\theta\cos2\theta,\ 4\cos^2\theta\sin2\theta)$

zの偏角は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ だが，今は

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で考える。

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta-\frac{5}{6}\\ \sin2\theta\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}4\cos^2\theta\cos2\theta-\frac{5}{6}\\ 4\cos^2\theta\sin2\theta\end{pmatrix}$

$$S(z)=\frac{1}{2}\left|\left(2\cos^2\theta-\frac{5}{6}\right)\cdot4\cos^2\theta\sin2\theta-\sin2\theta\cdot\left(4\cos^2\theta\cos2\theta-\frac{5}{6}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sin2\theta\cdot\left(8\cos^4\theta-\frac{10}{3}\cos^2\theta-4\cos^2\theta\cos2\theta+\frac{5}{6}\right)\right|$$

$$\sim\sim=8\cos^4\theta-\frac{10}{3}\cos^2\theta-4\cos^2\theta(2\cos^2\theta-1)+\frac{5}{6}$$

$$=\frac{2}{3}\cos^2\theta+\frac{5}{6}$$

$$S(z)=\frac{1}{2}\left|\sin2\theta\cdot\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+\frac{5}{6}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{5}{6}\right)\quad\left[0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{より}\ \sin2\theta>0\right]$$

$$=\frac{1}{12}\sin2\theta\,(2\cos2\theta+7)$$

$$=\frac{1}{12}(\sin4\theta+7\sin2\theta)\ \text{---}(*)$$

ここで $2\theta=t$ とおき $(*)=g(t)$ とする

$$g(t)=\frac{1}{12}(\sin2t+7\sin t)\quad(0<t<\pi)$$

$$g'(t)=\frac{1}{12}(2\cos2t+7\cos t)$$

$$=\frac{1}{12}\{2(2\cos^2t-1)+7\cos t\}$$

$$=\frac{1}{12}(4\cos^2t+7\cos t-2)$$

$$=\frac{1}{12}(4\cos t-1)(\cos t+2)$$

$g'(t)$の符号 $\Longleftrightarrow$ $\cos t-\frac{1}{4}$の符号

$\cos t=\frac{1}{4}$となる t を α とすると

t	(0)		α		π
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗		↘	

$t=\alpha$ で極大かつ最大

$\cos\alpha=\frac{1}{4}$ だから $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$

最大値は

$$g(\alpha)=\frac{1}{12}(\sin2\alpha+7\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{12}(2\sin\alpha\cos\alpha+7\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{15\sqrt{15}}{8}$$

$$=\frac{5\sqrt{15}}{24}$$

最大となるのとき $\cos t=\frac{1}{4}$

$\cos2\theta=\frac{1}{4}$

$2\cos^2\theta-1=\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta=\frac{5}{8}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$より $\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$

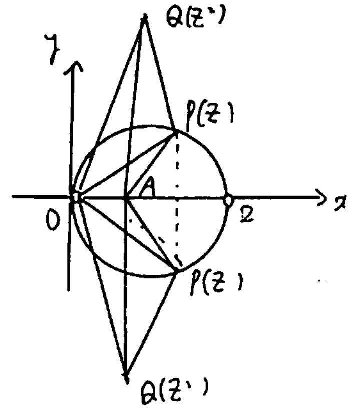
実際の偏角は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから

$\therefore$ P$(2\cos^2\theta,\ \pm\sin2\theta)=\left(\frac{5}{4},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

以上から

$S(z)$ の最大値は $\frac{5\sqrt{15}}{24}$

このとき $z=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}i$



$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \sin x \int_0^x f(u)\cos u\,du + f(x)\cos^2 x + \cos x \int_0^x f(u)\sin u\,du + f(x)\sin^2 x$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + f(x) - \sin x \int_0^x f(u)\cos u\,du + \cos x \int_0^x f(u)\sin u\,du$$

ここで ②より

$$f(x) - \sin x \int_0^x f(u)\cos u\,du + \cos x \int_0^x f(u)\sin u\,du = \log(x+1)$$ だから

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \log(x+1)$$

従って

$$f'(x) = \int\left\{-\frac{1}{(x+1)^2} + \log(x+1)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{x+1} + (x+1)\log(x+1) - x + C_1$$

(C_1は積分定数)

③で $x=0$として $f'(0)=1$ だから $C_1=0$

これより

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + (x+1)\log(x+1) - x$$

$$f(x) = \int\left\{\frac{1}{x+1} - x + (x+1)\log(x+1)\right\}dx$$

$$= \log(x+1) - \frac{x^2}{2} + \int (x+1)\log(x+1)\,dx$$

ここで $I = \int (x+1)\log(x+1)\,dx$ とする.

$x+1=t$ とおくと $dx = dt$

$$I = \int t\log t\,dt = \frac{t^2}{2}\log t - \frac{t^2}{4} + C_1$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(\log t - \frac{1}{2}\right) + C_1$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\left\{\log(x+1) - \frac{1}{2}\right\} + C_1$$

(C_1は積分定数)

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{2}\left\{\log(x+1) - \frac{1}{2}\right\} + C_2$$

①より $f(0)=0$ だから $-\frac{1}{4} + C_2 = 0$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{2}\left\{\log(x+1) - \frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{4}$$

$$= \left\{\frac{(x+1)^2}{2} + 1\right\}\log(x+1) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

IV

$$w = \frac{1}{|z|^2 - 2z} \quad (z \neq 0, 2)$$

(問1) $z = x + yi$ とおくと

$|z|^2 = x^2 + y^2$

$$w = \frac{1}{x^2+y^2-2(x+yi)} = \frac{1}{x^2+y^2-2x-2yi}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x+2yi}{(x^2+y^2-2x)^2+4y^2}$$

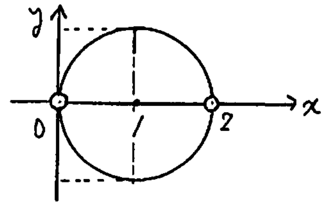
wが純虚数だから, wの実部 $=0$

$x^2+y^2-2x=0$

$(x-1)^2+y^2=1$

zは中心 1, 半径 1の円,

ただし, $z \neq 0, 2$



(問2) $A\left(\frac{5}{6}\right)$ $P(z)$ $Q(z^2)$ とおく

$OP = r$, zの偏角をθとすると

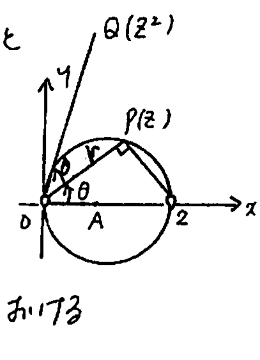
$\cos\theta = \frac{OP}{2} = \frac{r}{2}$

$r = 2\cos\theta$

従って Pの座標は

$P(2\cos\theta\cdot\cos\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta)$

$= (2\cos^2\theta,\ \sin 2\theta)$ とおける



$\boxed{\text{V}}$

ABの中点をOとすると $A(\sqrt{3},0)$ $B(-\sqrt{3},0)$ とする

楕円の式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと

長軸の長さが4だから $a=2$

焦点の条件から $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$

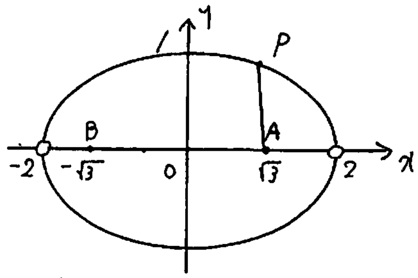
$4-b^2=3$

$b^2=1$

従って 楕円の式は

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ —— ※1

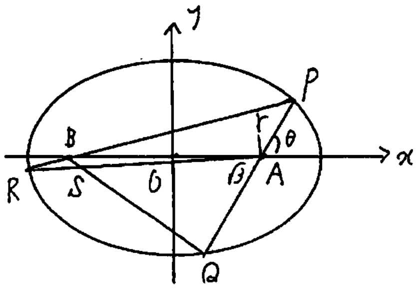
(問1)



図から $|\overrightarrow{PA}|=l$ の取れる範囲は

$2-\sqrt{3}<l<2+\sqrt{3}$

(問2)



Aを極, APのx軸の正方向となす角をθ, AP=rとおく.

$P(\sqrt{3}+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と設定できる.

Pが楕円※1上に存在するので,

$\frac{1}{4}(\sqrt{3}+r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1$

$3+2\sqrt{3}r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+4r^2(1-\cos^2\theta)=4$

$(4-3\cos^2\theta)r^2+2\sqrt{3}r\cos\theta-1=0$

$r=\frac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm\sqrt{3\cos^2\theta+(4-3\cos^2\theta)}}{4-3\cos^2\theta}$

$=\frac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm2}{4-3\cos^2\theta}$

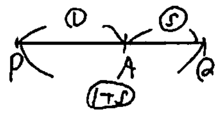
$r>0$だから

$r=\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{4-3\cos^2\theta}=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}=l$ ---①

このとき Qの偏角は $\theta+\pi$ だから

$AQ=r(\theta+\pi)=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos(\theta+\pi)}=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$ ---②

ここで $\overrightarrow{PQ}=(1+s)\overrightarrow{a}$ だから



$PA:AQ=l:AQ=1:s \rightarrow AQ=ls$

②より $ls=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$ —③'

①,③'より

$2+\sqrt{3}\cos\theta=\frac{1}{l}$

$2-\sqrt{3}\cos\theta=\frac{1}{ls}$

これらを加えて

$4=\frac{1}{l}+\frac{1}{ls}=\frac{s+1}{ls}$

$4ls=s+1$

$s=\frac{1}{4l-1}$ ---③

また 楕円の定義から

$PA+PB=4$ (長軸の長さ) だから

$PB=4-PA=4-l$

従って, ③のlの所を $4-l$ とおいて

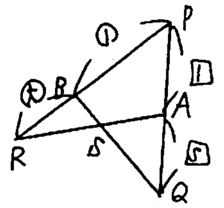
$t=\frac{1}{4(4-l)-1}=\frac{1}{15-4l}$

以上から

$s=\frac{1}{4l-1}$, $t=\frac{1}{15-4l}$

(問3)

メネラウスの定理から



$$\frac{PQ}{QA}\cdot\frac{AS}{SR}\cdot\frac{RB}{BP}=1$$

$$\frac{1+s}{s}\cdot\frac{AS}{SR}\cdot\frac{t}{1}=1$$

$$\frac{AS}{SR}=\frac{s}{(1+s)t}=\frac{\frac{1}{4l-1}}{\left(1+\frac{1}{4l-1}\right)\cdot\frac{1}{15-4l}}$$

$$=\frac{1}{\frac{4l}{15-4l}}=\frac{15-4l}{4l}$$

$$\overrightarrow{PS}=\frac{4l\overrightarrow{PA}+(15-4l)\overrightarrow{PR}}{(15-4l)+4l}$$

$$=\frac{4l}{15}\overrightarrow{PA}+\frac{15-4l}{15}(1+t)\overrightarrow{PB}$$

$$=\frac{4l}{15}\vec{a}+\frac{15-4l}{15}\left(1+\frac{1}{15-4l}\right)\vec{b}$$

$$=\frac{4l}{15}\vec{a}+\frac{16-4l}{15}\vec{b}$$

従って $u=\frac{4l}{15},\ v=\frac{16-4l}{15}$

(問4)

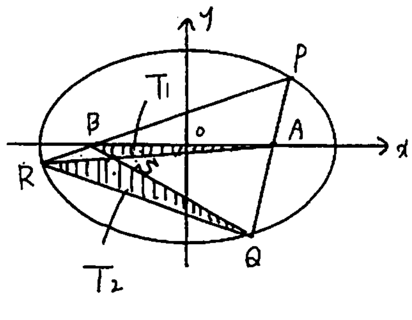
メネラウスの定理から

$$\frac{PR}{RB}\cdot\frac{BS}{SQ}\cdot\frac{QA}{AP}=1$$

$$\frac{1+t}{t}\cdot\frac{BS}{SQ}\cdot\frac{s}{1}=1$$

$$\frac{BS}{SQ}=\frac{t}{s(1+t)}=\frac{\frac{1}{15-4l}}{\frac{1}{4l-1}\left(1+\frac{1}{15-4l}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{16-4l}{4l-1}}=\frac{4l-1}{16-4l}$$



$8T_1=3T_2$ より $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{3}{8}$

ここで

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{SA\cdot SB}{SR\cdot SQ}=\frac{15-4l}{4l}\cdot\frac{4l-1}{16-4l}$$

条件から

$$\frac{(15-4l)(4l-1)}{4l(16-4l)}=\frac{3}{8}$$

$$(15-4l)(4l-1)=3l(8-2l)$$

$$-16l^2+64l-15=24l-6l^2$$

$$10l^2-40l+15=0$$

$$2l^2-8l+3=0$$

$$l=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$$

共に(問1)の範囲をみたす。

講評

昨年と同様5題の出題で
I, IIは結果のみ, III, IV, Vが記述式となっている。

I. 3次方程式の異なる3解が等比数列をなすときの, 解の値と係数の値

II. 確率計算

III. 積分方程式

IV. 複素数平面で純虚数となる条件と三角形の面積の最大

V. 楕円上の点のベクトルと三角形の面積比

I, IIは基本的、IIIは標準的, IVの(問2), Vは難しい。I, II, IIIを完答で, IV, Vの部分点をどれ程集めるのかが合否の分かれ目になるだろう。