2019 杏林大学 医学部 数学 解答

I.

(1) $U=\{x \mid x$は100未満の正の整数$\}$

$A=\{x \mid x$は3の倍数$\}$

$B=\{x \mid x$は4の倍数$\}$

$C=\{x \mid x$は5の倍数$\}$

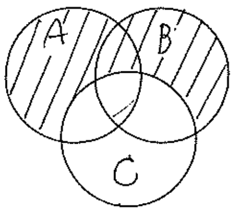
$A\cap B$は12の倍数だから $n(A\cap B)=8$

$n(A)=33,\ n(B)=24,\ n(U)=99$ だから

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A\cup B}) &= n(U)-n(A\cup B)\\
&= n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\
&= 99-(33+24-8)\\
&= 99-49=50
\end{aligned}
$$

$A\cap B\cap C$は60の倍数だから

$n(A\cap B\cap C)=1$



$(A\cup B)\cap\overline{C}$は図の斜線部分

$n(A\cap C)=6$ (15の倍数)

$n(B\cap C)=4$ (20の倍数)

$$
\begin{aligned}
&n((A\cup B)\cap\overline{C})\\
&= n(A\cup B)-\{n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)\}\\
&= 49-(6+4-1)\\
&= 40
\end{aligned}
$$

(2) $X=3$のとき Yは4通り, Zは3通りだから

$4\times 3=12$通り

$X=3$で賞品を受け取るのは

(i) Xが最も小さい番号のとき

$Y=4,\ Z=5$ or $Y=5,\ Z=4$ の2通り

(ii) Xが2番目に小さい番号のとき

$\begin{cases} Y=1 & Z=4,5 \\ Y=2 & Z=4,5 \end{cases}$, $\begin{cases} Z=1, & Y=4,5 \\ Z=2, & Y=4,5 \end{cases}$

$4+4=8$通り

合計 $2+4+4=10$通りある.

次に $X\leqq 3$で賞品をもらうのは

(i) $X=3$なら 10通り

(ii) $X=2$なら

ア) Xが最小となる場合

$\begin{cases} Y=3, & Z=4,5 \\ Y=4, & Z=3,5 \\ Y=5, & Z=3,4 \end{cases}$ 6通り

イ) Xが2番目に小さい場合

$\begin{cases} Y=1, & Z=3,4,5 \\ Z=1, & Y=3,4,5 \end{cases}$ 6通り

(iii) $X=1$なら

$\begin{cases} Y=2 & Z=3,4,5 \\ Y=3 & Z=2,4,5 \\ Y=4 & Z=2,3,5 \\ Y=5 & Z=2,3,4 \end{cases}$ $3\times 4=12$通り

合計 $10+12+12=34$通り

従って $X\leqq 3$で賞品をもらう確率は

$$\frac{34}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{17}{30}$$

また $X\geqq 2$で Zが賞品をもらうのは

(i) $X=2$のとき

$\begin{cases} Z=1, & Y=3,4,5 \\ Z=3 & Y=4,5 \\ Z=4 & Y=5 \end{cases}$ 6通り

(ii) $X=3$のとき

$\begin{cases} Z=1, & Y=2,4,5 \\ Z=2 & Y=1,4,5 \\ Z=4, & Y=5 \end{cases}$ 7通り

(iii) $X=4$のとき

$\begin{cases} Z=1, & Y=2,3,5 \\ Z=2, & Y=1,3,5 \\ Z=3 & Y=1,2,4 \end{cases}$ 9通り

(iv) $X=5$ のとき

$$\begin{cases} Z=1, & Y=2,3,4 \\ Z=2 & Y=1,3,4 \\ Z=3, & Y=1,2,4 \\ Z=4 & Y=1,2,3 \end{cases} \quad 12\text{通り}$$

合計　$6+7+9+12=34$通り

これより　$X\geqq 2$で　Zが賞品をもらうのは

$$\frac{34}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{17}{30}$$

次に　Xの番号が1でない $\left(\frac{4}{5}\right)$ もとで Zが賞品を受け取るのは

$$\frac{\frac{17}{30}}{\frac{4}{5}}=\frac{17}{24}$$

II.　$f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$ ---- ①

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{3}$ だから

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(a)　$f'(x)=\dfrac{1\cdot(2x^2+1)-x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+1}{(2x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f''(x)=\frac{-4x(2x^2+1)^2-(-2x^2+1)\cdot 2(2x^2+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-4x(2x^2+1)-8x(-2x^2+1)}{(2x^2+1)^3}$$

$$=\frac{8x\left(x^2-\frac{3}{2}\right)}{(2x^2+1)^3}$$

$$=\frac{8x\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{(2x^2+1)^3}$$

x		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↘		↘	極小	↗		↗	極大	↘		↘

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ で極大となり，極大値 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

また，変曲点は3個あり，そのうち，x座標が最大となるのは　$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}$ だから

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$$

(b)　$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{9}$ だから，Pにおける接線は

$y-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y=\frac{2}{9}x+\frac{2}{9}$ ---- ②

次に ①，② を連立させて

$\dfrac{x}{2x^2+1}=\dfrac{2}{9}(x+1)$

$9x=2(x+1)(2x^2+1)$

$4x^3+4x^2-7x+2=0$

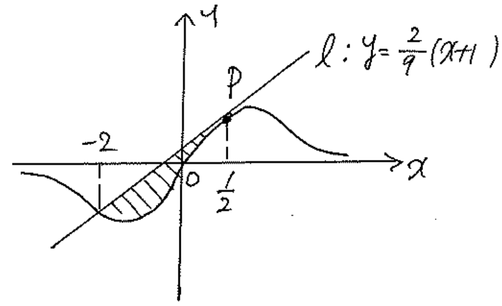
$(2x-1)^2(x+2)=0$

[$x=\frac{1}{2}$で ①と②は接するので，連立させた式は $(2x-1)^2$を因数に持つ]

P以外だから　$x=-2$

$f(-2)=-\frac{2}{9}$ だから

Pと異なる交点は　$\left(-2, -\frac{2}{9}\right)$



次に ①と②が囲む部分の面積をSとすると

$$S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{9}(x+1)-\frac{x}{2x^2+1}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{9}(x+1)^2-\frac{1}{4}\log(2x^2+1)\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2-(-1)^2\right\}-\frac{1}{4}\left(\log\frac{3}{2}-\log 9\right)$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{36}+\frac{1}{4}\log 6$$

(c) Pを通り，傾きmの直線は

$$y=m\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3} \quad \text{---- ③}$$

①と③を連立させて

$$\frac{x}{2x^2+1}=m\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}$$

$$x=m\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)+\frac{1}{3}(2x^2+1)$$

$$m\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)+\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{3}=0$$

$$m\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2mx^2+\frac{2}{3}x+m-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$x=\frac{1}{2},\quad 2mx^2+\frac{2}{3}x+m-\frac{2}{3}=0 \quad \text{---(※)}$$

③が①と複数の共有点を持つので

方程式(※)が実数解を持てばよい

ア) $m=0$ なら (※)は

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=0$$

$$x=1$$

③と①は複数の共有点を持つ

イ) $m\neq 0$ なら，(※)の判別式$\geqq 0$

となればよいので

$$D=\frac{4}{9}-8m\left(m-\frac{2}{3}\right)\geqq 0$$

$$8m^2-\frac{16}{3}m-\frac{4}{9}\leqq 0$$

$$m^2-\frac{2}{3}m-\frac{1}{18}\leqq 0$$

$$\frac{\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}}{2}\leqq m\leqq\frac{\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}}{2}$$

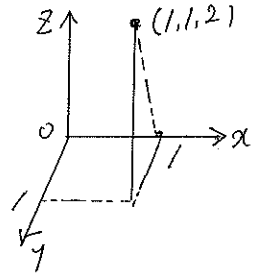
$$\frac{2-\sqrt{6}}{6}\leqq m\leqq\frac{2+\sqrt{6}}{6}$$

ア)またはイ)だから，求めるmの範囲は $\dfrac{2-\sqrt{6}}{6}\leqq m\leqq\dfrac{2+\sqrt{6}}{6}$

III.

(a) $A_0(1,1,0)$ をz方向だけ2だけ平行移動した点は $(1,1,2)$

この点をx軸回りに回転させる。



この点とx軸までの距離は

$$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

従って，$a_1=\sqrt{5}$

次にA_nは $A_n(1, a_n, 2)$ だから

この点をx軸回りに回転させる。

これとx軸までの距離は

$$\sqrt{a_n^2+4}$$

これがa_{n+1}だから

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+4}$$

両辺を平方して

$$a_{n+1}^2=a_n^2+4$$

数列$\{a_n^2\}$は初項$a_1^2=5$，公差4の等差数列だから

$$a_n^2=5+4(n-1)=4n+1$$

$$a_n=\sqrt{4n+1}$$

(b) A_0B_0 を $t:1-t$ に内分する点Q_0は

$Q_0(1-2t, 1-2t, 0)$

これをz方向へ2だけ平行移動した点は

$(1-2t, 1-2t, 2)$ --- ※1

※1とx軸との距離は

$$\sqrt{(1-2t)^2+2^2}=\sqrt{4t^2-4t+5}$$

これがyだから

$$y=\sqrt{(1-2t)^2+4}$$

$x=1-2t$ だから

$$y=\sqrt{x^2+4}$$

$$y^2=x^2+4$$

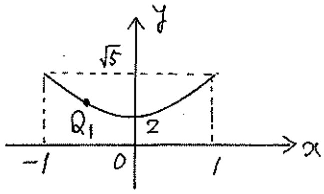
$$-x^2+y^2=4$$

(注) $0 \leqq t \leqq 1$ より $-1 \leqq 1-2t \leqq 1$

つまり $-1 \leqq x \leqq 1$

従って、$y=\sqrt{x^2+4}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上に

点 Q_1 が存在する。

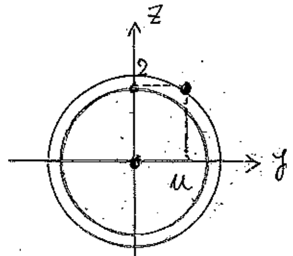


(c) 線分 A_0C_0 上の点は $(1, u, 0)$ $(-1 \leqq u \leqq 1)$

とおける。この点を z 方向へ 2だけ平行

移動すると、 $(1, u, 2)$ …… ①

この点を x軸回りに回転すると

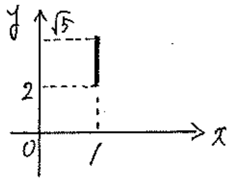


①と x軸との距離は $\sqrt{u^2+4}$ $(-1 \leqq u \leqq 1)$

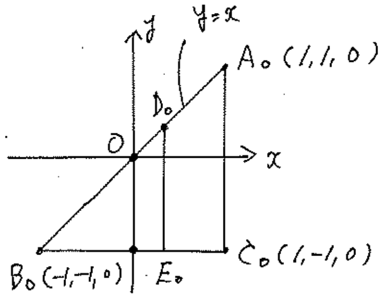
最小値は $u=0$ のときで $\sqrt{4}=2$

最大値は $u=\pm 1$ のときで $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

従って、長さ $\sqrt{5}-2$ の線分となる。



(d)



A_0B_0 上の点を $D_0(s, s, 0)$, B_0C_0 上の

点を $E_0(s, -1, 0)$ $(-1 \leqq s \leqq 1)$ とおくと

線分 D_0E_0 は $\triangle A_0B_0C_0$ の内部及び周上の

領域を動く。 D_0, E_0 を z方向へ 2だけ

移動した点を $D_1(s, s, 2)$ $E_1(s, -1, 2)$ とする。

線分 D_1E_1 に操作 M を行なう。

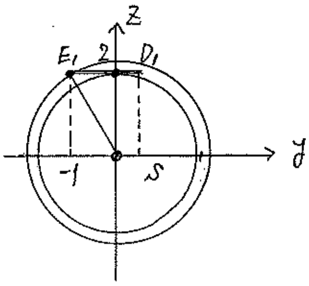
(ア) $0 \leqq s \leqq 1$ の時

線分 D_1E_1 上の

点で x軸との距離が

最小は 2、最大は

$\sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$



従って 領域は

$0 \leqq x \leqq 1$ かつ $2 \leqq y \leqq \sqrt{5}$

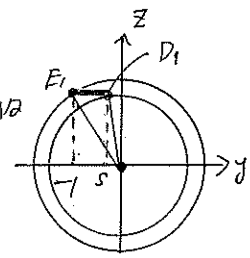
(イ) $-1 \leqq s \leqq 1$ の時

線分 D_1E_1 上の点で

x軸との距離が最小となるのは

双曲線 $y=\sqrt{x^2+4}$ となり、

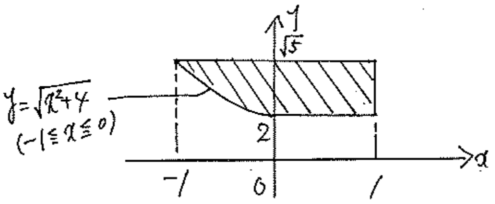
最大は $\sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$



従って、領域は

$-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $\sqrt{x^2+4} \leqq y \leqq \sqrt{5}$

以上から、集合 D が表す領域は



IV.

a) ◦ $f(x)=e^{-3x}$ なら $f(y)=e^{-3y}$

$f(x+y)=e^{-3(x+y)}=e^{-3x} \cdot e^{-3y}=f(x)f(y)$

◦ $f(x)=6\log_2 x$ なら $f(y)=6\log_2 y$

$f(xy)=6\log_2 xy=6\log_2 x+6\log_2 y$

$=f(x)+f(y)$

◦ $f(x)=\cos x$ なら $f'(x)=-\sin x$

$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=\cos^2 x-(-\sin x)^2$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\cos 2x$

$=f(2x)$

○ $f(x)=-x$ なら $f(f(x))=f(-x)$

$=-(-x)$

$=x$

従って $f(f(x))+f(x)=x+(-x)=0$

○ $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ なら $f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2$

$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})-\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$

$=1$

○ $f(x)=e^{-3x}$ なら $f'(x)=-3e^{-3x}$

$3f(x)+f'(x)=3e^{-3x}-3e^{-3x}=0$

以上から

ア)は $f(x)=e^{-3x}$, イ)は $f(x)=6\log_2 x$

ウ)は $f(x)=\cos x$, エ)は $f(x)=-x$

オ)は $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ カ)は $f(x)=e^{-3x}$

b) $f(x)=C$ (Cは0でない適当な定数)

ア) $C=C^2$ だから $C=0,1$

$C=1$ つまり $f(x)=1$ とすれば正しい.

イ) $C=C+C$ だから $C=0$ となり

正しくない

ウ) $C^2-0^2=C$ だから $C=0,1$

$C=1$ つまり $f(x)=1$ とすれば正しい.

エ) $C+C=0$ だから $C=0$ となり,

正しくない

オ) $C^2-0^2=1$. だから $C=\pm1$

$f(x)=1$ または $f(x)=-1$ とすれば正しい.

カ) $3C+0=0$ だから $C=0$ となり,

正しくない

以上から $f(x)=C$ $(C\neq0)$ とすると真となるのは 3個 ある.

次に (a)で選んだ関数に対して,常も真となるのは ----- (#)

ア) 反例として $f(x)=e^x$

イ) 反例として $f(x)=\log_e x$

ウ) 反例として $f(x)=1$

オ) 反例として $f(x)=1$

カ) 反例として $f(x)=2e^{-3x}$

があるので正しくない.

エについて

$f(f(x))+f(x)=0$ なら, $f(x)=y$ とおくと

$f(y)+y=0$ -----(※)

(※)の両辺を x で微分して

$f'(y)\cdot y'+y'=0$

$\{f'(y)+1\}y'=0$

$f'(y)=-1$ または $y'=0$

(i) $f'(y)=-1$ なら $f(y)=-y+A$ (Aは定数)

とおける, y を x に書き直して

$f(x)=-x+A$

$f(f(x))+f(x)=0$ へ代入して

$f(-x+A)+(-x+A)=0$

$-(-x+A)+A-x+A=0$

$A=0$

従って $f(x)=-x$

(ii) $y'=0$ なら $f(y)=B$ (Bは定数)とおける.

y を x に書き直して $f(x)=B$

$f(f(x))+f(x)=0$ へ代入して

$f(B)+B=0$

$B+B=0$

$B=0$

従って, $f(x)=0$

これは $f(x)$ は恒等的に0とならない

ことに反するので不適

以上から $f(f(x))+f(x)=0$ なら $f(x)=-x$

だから (#)が成立するのは 1個

(注) 2月14日 大学の発表の解釈について

$f(f(x))+f(x)=0$ なら $f(x)=-x$

について, $f(f(x))+f(x)=0$ が成立するのは「正の実数 x に対してのみ」と解釈すると次の様な関数を考える

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\geqq 0)\\ x^2 & (x<0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\geqq 0)\\ x^3 & (x<0)\end{cases}$$

などとすると, $f(x)$ は恒等的に 0 でない微分可能な連続関数となる.

$x>0$ のとき $f(x)=0$ と $f(0)=0$ だから

$f(f(x))+f(x)=f(0)+0=0+0=0$

従って, これが反例となり, #7 が成立するのは 0個 となる.

(C) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ だから

$\lim\limits_{x\to+0} f(x+y)=f(0+y)=f(y)$ ---- ①

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)f(y)=f(y)\{\lim\limits_{x\to+0} f(x)\}$ --- ②

①=② だから

$f(y)=f(y)\{\lim\limits_{x\to+0} f(x)\}$

$f(y)$ は恒等的に 0 とならないので

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$

次に $f(xy)=f(x)+f(y)$ について

$\lim\limits_{x\to1} f(xy)=f(y)$ ---③

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+f(y)\}=\{\lim\limits_{x\to1} f(x)\}+f(y)$ ---④

③=④ だから

$f(y)=\{\lim\limits_{x\to1} f(x)\}+f(y)$ だから

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$