$\boxed{1}$ (1) 白 or 赤 を A　青 を B とする

A を出すと和は +1，B を出すと和は −1

される。

(ア) BAA と出せばよい

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\underline{\frac{9}{64}}_{/\!/}$$

(イ) ABBB or BBAB or BBBA

と出せばよい $3\times\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3=\underline{\frac{9}{256}}_{/\!/}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c} \iff$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{27}{2}$

BH : HC $= t : 1-t$ とする

$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \iff$

$\left\{\left(\frac{2}{3}-t\right)\vec{b}+\left(t-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0 \iff$

$\left(\frac{2}{3}-t\right)|\vec{b}|^2+\left(-1+2t\right)\vec{b}\cdot\vec{c}-\left(t-\frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2=0$

$\iff t=\frac{11}{30}$ より

$$\frac{BH}{BC}=\underline{\frac{11}{30}}_{/\!/}$$

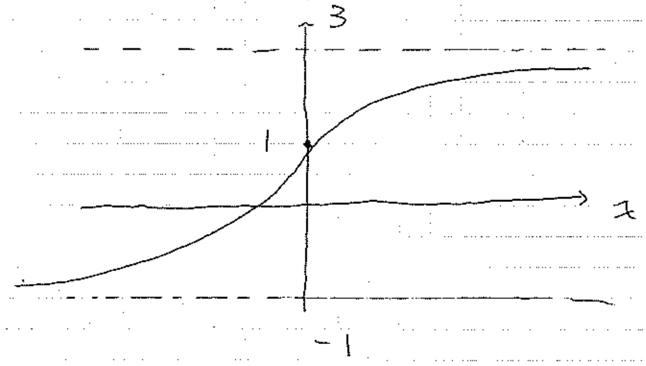
2 (1) $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ $\quad f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

$$f''(x)=\dfrac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

x		0	
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	⤴	1	↗

変曲点 $(0,0)$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=3$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$



(2) Pのx座標を t とする

$g(x)=\dfrac{e^x}{a^2}+b$ とする

$f(t)=g(t) \longleftrightarrow \dfrac{3e^t-1}{e^t+1}=\dfrac{e^t}{a^2}+b$ —①

$f'(t)=g'(t) \longleftrightarrow \dfrac{4e^t}{(e^t+1)^2}=\dfrac{e^t}{a^2}$

$\longleftrightarrow \quad a=\dfrac{e^t+1}{2} \longleftrightarrow t=\log(2a-1)$

$P\left(\log(2a-1),\ \dfrac{3a-2}{a}\right)$

① より $b=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{4}{a}+3$

(3)
$$S(a)=\int_0^{\log(2a-1)}\left\{\frac{e^x}{a^2}+b-\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{e^x}{a^2}+bx\right]_0^{\log(2a-1)}-\int_1^{2a-1}\left(\frac{-1}{t}+\frac{4}{t+1}\right)dt$$

$(t=e^x$ と置換$)$

$$=\frac{2a-2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a}\right)\log(2a-1)+4\log\frac{2a-1}{2a}+4\log 2$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)=4\log 2$

$\boxed{3}$ $y - x = k \longleftrightarrow y = x + k : l$ とする

$f(x) = -x^2 + 20nx$ を C とする

$f'(x) = 1 \longleftrightarrow x = 10n - \frac{1}{2}$ より

l, C が接するとすれば接点の x は

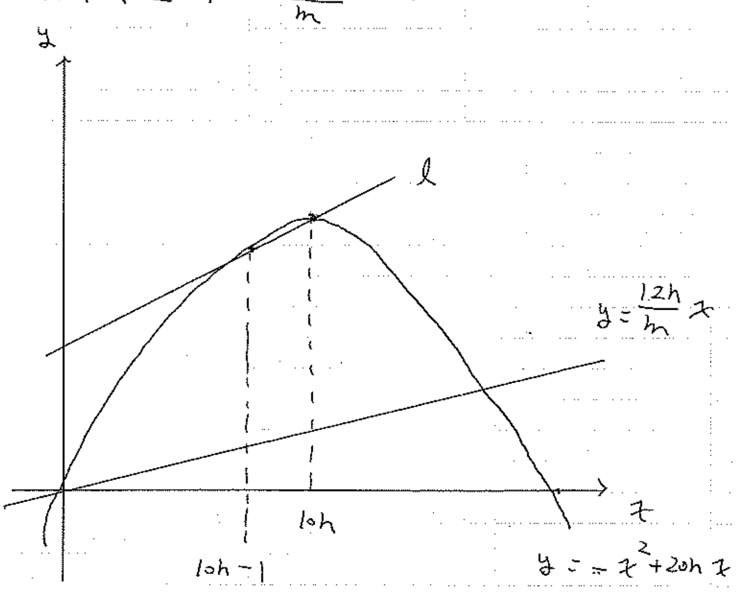
$x = 10n - \frac{1}{2}$ となる

$y = \frac{12n}{m}x : S$ とする

C と S は $x = 0,\ 20n - \frac{12n}{m}$ で交わる

○ $m \geqq 2$ のとき

$10n < 20n - \frac{12n}{m}$ より



x, y は自然数より l が最も上にくるのは

$(x, y) = (10n, 100n^2)$,

$(10n-1,\ 100n^2-1)$ のとき

最大値は $k = y - x = \underline{100n^2 - 10n}$

○ $m = 1$ のとき

C と l は $x = 0,\ 8n$ で交わるので

$(x, y) = (8n,\ 96n^2)$ のとき

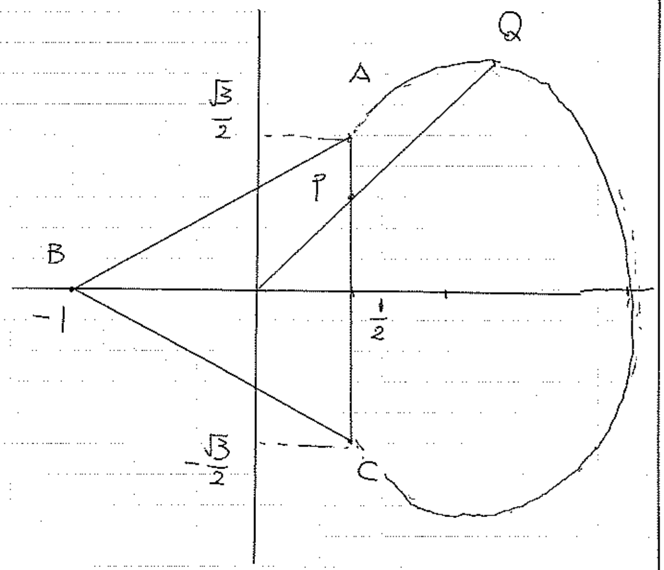
最大値 $k = y - x = \underline{96n^2 - 8n}$

4 (1) 条件より

$$w = \frac{1}{|z|^2} z = \frac{1}{z\bar{z}} z = \frac{1}{\bar{z}}$$

(2) $x^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow$

$x = -1,\ \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ より $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$



z が線分AC上のとき

$z = \frac{1}{2} + ti \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② とおける

$w = x + yi$ として (1) に代入

$$x + yi = \frac{1}{\frac{1}{2} - ti} = \frac{2}{1+4t^2} + \frac{4t}{1+4t^2}i$$

$\Longleftrightarrow x = \frac{2}{1+4t^2}$ ① $\quad y = \frac{4t}{1+4t^2}$

$\frac{y}{x} = 2t \Longleftrightarrow \frac{y}{2x} = t$ を ① に代入

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

ただし ② より $0 \leqq t^2 \leqq \frac{3}{4}$ より

$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ をとる (図は上図)

ACとQの動く図で囲まれた面積は

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Pが辺AB, BCを動くときも同様の面積となる。

それに△ABCも加えた図の面積より

$$S = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times 3 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$= 2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

//

講　評

◎ 去年に比べてやや解き易い

◎ 3, 4問はその中でも解きたくい問である