2019 昭和大学 医学部 数学 解答

$\boxed{1}$

(1) $z^{12}=1$ ……

$|z|=1$だから $z=\cos\theta+i\sin\theta$とおける

$(0\leqq\theta<2\pi)$

$z^{12}=\cos 12\theta+i\sin 12\theta=1$より

$12\theta=2k\pi$ (kは整数)

$\theta=\dfrac{k\pi}{6}$

$0\leqq\theta<2\pi$だから

$0\leqq\dfrac{k\pi}{6}<2\pi$

$0\leqq k<12$

kは整数だから $0\leqq k\leqq 12$

従って, $z=\cos\dfrac{k\pi}{6}+i\sin\dfrac{k\pi}{6}$

(kは $0\leqq k\leqq 11$ の整数)

(2) αは単位円上の点で虚部が正だから

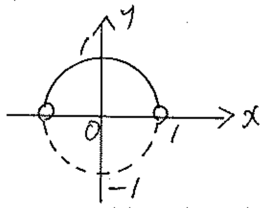


図1

次に $1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

従て $(1-\sqrt{3}i)\alpha=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$は

図1を 2倍して, 原点回りに$-\frac{\pi}{3}$だけ

回転したもの

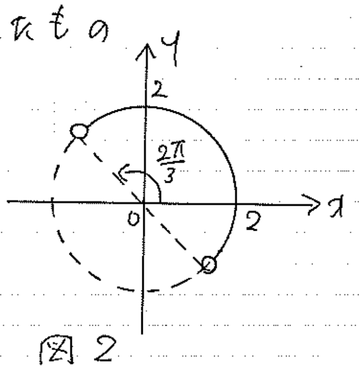


図2

さらに $w=(1-\sqrt{3}i)\alpha-(1+i)$は

図2を x方向へ-1, y方向へ-1だけ

平行移動したものだから, wの

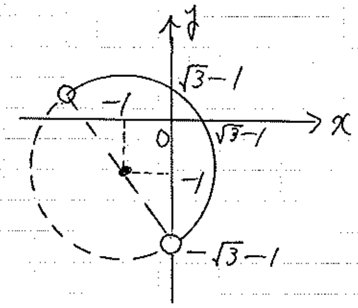


図3

軌跡は 図3の実線部分となる.

[別解]

$\alpha=x+yi$とおくと $x^2+y^2=1$ かつ $y>0$

また $|\alpha|=1$

$w=(1-\sqrt{3}i)\alpha-(1+i)$だから

$\alpha=\dfrac{w+(1+i)}{1-\sqrt{3}i}$

$|\alpha|=\left|\dfrac{w+(1+i)}{1-\sqrt{3}i}\right|=1$

$|w+(1+i)|=|1-\sqrt{3}i|=2$

つまり $|w+(1+i)|=2$ —— ①

また $w=X+Yi$とすると

$\alpha=\dfrac{(X+Yi)+(1+i)}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{(X+1)+(Y+1)i}{1-\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{\{(X+1)+(Y+1)i\}(1+\sqrt{3}i)}{1+3}$

αの虚部は $\frac{1}{4}\{(Y+1)+\sqrt{3}(X+1)\}$

これが正だから

$(Y+1)+\sqrt{3}(X+1)>0$

$Y+1>-\sqrt{3}(X+1)$ ---②

①より $|X+Yi+1+i|=2$

$|(X+1)+(Y+1)i|=2$

$(X+1)^2+(Y+1)^2=4$ —— ①'

wの軌跡は ①'かつ②だから

図3の様になる

(3) $\left(\frac{w+1+i}{2}\right)^{12}=1$ より

$(w+1+i)^{12}=2^{12}$ ---(※)

$w+1+i=(1-\sqrt{3}i)\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$

とおける

$[\,|1-\sqrt{3}i|=2,\ |\alpha|=1$ より $|(1-\sqrt{3}i)\alpha|=2\,]$

従って $(w+1+i)^{12}=2^{12}(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)$

(※)より $2^{12}(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)=2^{12}$

$\cos 12\theta+i\sin 12\theta=1$

(1)の結果から $\theta=\frac{k\pi}{6}$ $(1\leqq k\leqq 11)$

このうち、(2)の軌跡に含まれるものは

$k=0, 1, 2, 3, 11$ のときの5点

(θは $\frac{\pi}{6}$ ずつ増加する)

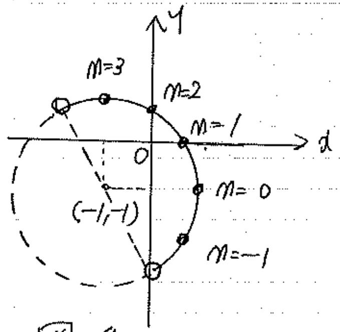


図4

従って、求める w は 図4の様になり、

$w=2\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)-(1+i)$

ただし n は $-1\leqq n\leqq 3$ の整数

$\boxed{2}$

(1)

群番号	1	2	3	4	----	n−1	n
群内の項数	1	2	4	6	----	2(n−2)	2(n−1)

$a_1=1$

$a_n=2(n-1)$ $(n\geqq 2)$

(1-1)

第n項の末項までに出現する項数は

$1+2+4+6+\cdots\cdots+2(n-1)$

$=1+2(1+2+3+\cdots\cdots+(n-1))$

$=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}$

$=n^2-n+1$ 項目

(1-2)

第n群 $(n\geqq 2)$ 内の和は

$\frac{1}{2n-1}\{2+4+6+\cdots\cdots+2\cdot 2(n-1)\}$

$=\frac{2}{2n-1}\{1+2+3+\cdots\cdots+2(n-1)\}$

$=\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{\{1+2(n-1)\}\cdot 2(n-1)}{2}$

$=2(n-1)$

第1群から第31群までの和は、第1群が2だから

$2+\sum_{k=2}^{31}2(k-1)$

$=2+2(1+2+3+\cdots\cdots+30)$

$=2+2\cdot\frac{(1+30)\cdot 30}{2}$

$=2+30\cdot 31=932$

(1-3)

第n群までの総和は

$2+\sum_{k=2}^{n}2(k-1)$

$=2+2(1+2+3+\cdots\cdots+(n-1))$

$=2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}$

$=n^2-n+2$

第n−1群までの総和は

$(n-1)^2-(n-1)+2=n^2-3n+4$

和が約2019となる項が第n群に所属しているとすると

$n^2-3n+4<2019\leqq n^2-n+2$ ---(※)

$$\left[\begin{array}{l} n^2 \fallingdotseq 2000 \\ n \fallingdotseq 20\sqrt{5} = 44.7\cdots \end{array}\right]$$

$n=45$とすると

$$\begin{cases} n^2-3n+4=1894 \\ n^2-n+2=1982 \end{cases}$$

$n=46$とすると

$$\begin{cases} n^2-3n+4=1982 \\ n^2-n+2=2072 \end{cases}$$

従って, $n=46$は(※)を満足する.

次に $2019-1982=37$だから

第46群内で和が約37となる項をさがす.

第46群の58番までの和は

$$\frac{1}{91}(2+4+6+\cdots+116)$$
$$=\frac{2}{91}(1+2+3+\cdots+58)$$
$$=\frac{59\cdot 58}{91}=37.6\cdots$$

第46群の57番目までの和は

$$\frac{1}{91}(2+4+6+\cdots+114)$$
$$=\frac{2}{91}(1+2+3+\cdots+57)$$
$$=\frac{58\times 57}{91}=36.3\cdots$$

従って, 和が最初に2019を超えるのは 第46群の58番目

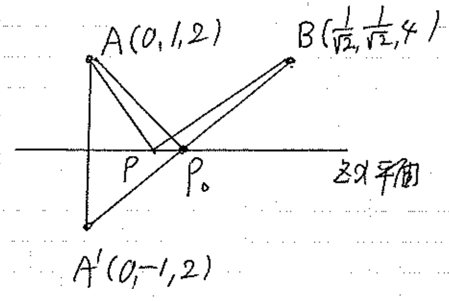
(2) $A(0,1,2)$ $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 4, \frac{1}{2}\right)$

(2-1)

A点のzx平面に関する対称点を

$A'(0,-1,2)$とする.



$AP+PB=A'P+PB \geqq A'B$

(等号はA', P, Bが一直線上のとき)

最小値は $A'B=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(4-2)^2}$

$=\sqrt{6+\sqrt{2}}$

最小となるときのPをP_0とすると,

直線$A'B$の式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}+1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (k\text{は実数})$$

これとzx平面との交点だから $y=0$として

$$-1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)k=0$$
$$k=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}k=\sqrt{2}-1$$
$$z=2+2k=6-2\sqrt{2}$$

$P_0(\sqrt{2}-1,\ 0,\ 6-2\sqrt{2})$

従って $AP(AP_0)$の式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AP_0}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \\ 4-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(tは実数)

[参考] t を消去して，x, y, z の関係式を作ると

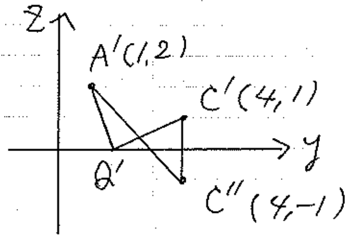
$$\frac{x}{\sqrt{2}-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4-2\sqrt{2}}\ (=t)$$

(2-2)

$Q(0, y, 0)$　$R(0, 0, z)$ とする

$AQ+QC=\sqrt{(y-1)^2+4}+\sqrt{(y-4)^2+1}$ ----(#1)

yz平面上で $A'(1, 2)$　$Q'(y, 0)$　$C'(4, 1)$ とする。また C'の z軸に関する対称点を $C''(4, -1)$ とする



$A'Q'+Q'C' \geqq A'C''$
（A', Q', C''が一直線上の時）

$A'C''$の式は　$z-2=-(y-1)$
$z=-y+3$

y軸との交点は　$(3, 0)$

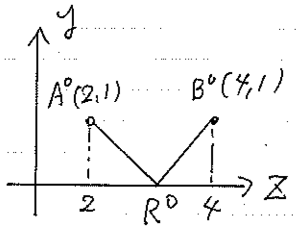
従て，(#1) 最小となるのは $y=3$ のときで

(#1)の最小値 $=\sqrt{2^2+4}+\sqrt{1^2+1}=3\sqrt{2}$

同様に

$AR+RB=\sqrt{(z-2)^2+1}+\sqrt{(z-4)^2+1}$ ---(※)

zy平面上で $A^{\circ}(2, 1)$　$B^{\circ}(4, 1)$　$R^{\circ}(z, 0)$ とする



図から $A^{\circ}R^{\circ}+R^{\circ}B^{\circ}$が最小となるのは $z=3$ のときで

このとき (※)の最小値は

$\sqrt{1+1}+\sqrt{1+1}=2\sqrt{2}$

従て $AQ+QC+AR+RB$の最小値は

$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

最小となるとき $Q(0, 3, 0)$ $R(0, 0, 3)$ だから QRの式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \left(\begin{array}{l} s\text{は実数} \\ s=3u \end{array}\right)$$

[参考] s を消去して，x, y, zの関係式を作ると　$x=0$.　$y=3-z$

$\boxed{3}$

(1) $\log_2 5<\frac{n}{3}$

$n>3\log_2 5=\log_2 5^3=\log_2 125$

ここで　$2^6=64$,　$2^7=128$

$2^6<125<128$ だから

$6<\log_2 125<7$

従て $n>\log_2 125=6.----$ だから

関係を満足する最小のnは 7

(2) 内接する正六角形の円の半径をrとすると

図1で $OA=r$

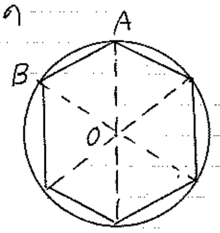


図1

外接する正六角形

図2で $OP=\frac{2}{\sqrt{3}}r$

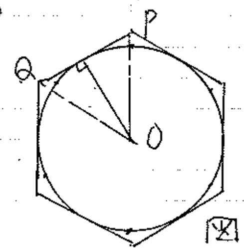


図2

$OA : OP$
$=r : \frac{2r}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{3} : 2$

面積比は $(\sqrt{3})^2 : 2^2 = 3 : 4$

従って $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{4}$

(3) データを小さい順に並べると

4, 9, 11, 14, 25, 29, 53, 54, 63, 78

中央値は $\dfrac{25+29}{2} = 27$

(4) 球の取り出し方は ${}_6C_3 = 20$ 通り

(4-1) $X=2$ となるのは残りの球を 3, 4, 5, 6 の4球の中から2球選べばよいから ${}_4C_2 = 6$

求める確率は $\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

(4-2)

$X=1$ となるのは ${}_5C_2 = 10$ 通り

$X=3$ ${}_3C_2 = 3$

$X=4$ ${}_2C_1 = 1$

X	1	2	3	4
確率	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

期待値は

$1 \times \dfrac{10}{20} + 2 \times \dfrac{6}{20} + 3 \times \dfrac{3}{20} + 4 \times \dfrac{1}{20}$

$= \dfrac{35}{20} = \dfrac{7}{4}$

$\boxed{4}$

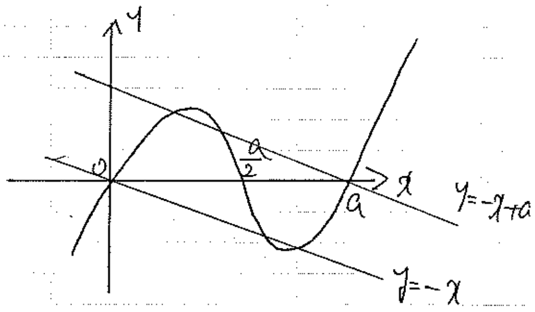
(1) $y = x(x-a)(2x-a)$ ---①

$y = -x + t \quad (0 \leqq t \leqq a)$ ---②

$0 \leqq t \leqq a$ のとき直線②は $y=-x$ から $y=-x+a$ まで平行移動した直線群となる。

従って①と②が常に3点で交わるには

①と $y=-x$ ---③，①と $y=-x+a$ ---④ が3点で交わればよい



①と③を連立

$x(x-a)(2x-a) = -x$

$x\{(x-a)(2x-a)+1\} = 0$

$x(2x^2 - 3ax + a^2 + 1) = 0$

$x = 0,\ 2x^2 - 3ax + a^2 + 1 = 0$ ---(※1)

(※1)は $x=0$ を解に持たないから，(※1)が異なる2実数解を持てばよい

(※1)の判別式

$D = 9a^2 - 8(a^2+1) > 0$

$a^2 - 8 > 0$

条件から $a \geqq 0$ としてよいから

$a > \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

①と④を連立

$x(x-a)(2x-a) = -x + a$

$(x-a)\{x(2x-a)+1\} = 0$

$(x-a)(2x^2 - ax + 1) = 0$

$x = a,\ 2x^2 - ax + 1 = 0$ ---(※2)

(※2)は $x=a$ を解に持たないから

(※2)が異なる2実数解を持てばよい

$D = a^2 - 8 > 0$

$a \geqq 0$ より $a > 2\sqrt{2}$

以上から，求める条件は

$a > 2\sqrt{2}$

(2) $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+1}=\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2+1}$

$x-1=\tan\theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \to 2$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

(3) $f'(2)=3$ ---- ①

$J=\int_{2-\pi}^{2+\pi}f(x)\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$ --- ②

②で $\frac{x}{2}-1=t$ とおくと $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}$

$dx=2dt$

x	$2-\pi$	$2+\pi$
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

$J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(2t+2)\sin t\,(2dt)$

$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(2t+2)\sin t\,dt$

ここで $f(x)$は2次関数だから

$f(x)=Ax^2+Bx+C\ (A\neq0)$ とおくと

$f'(x)=2Ax+B$

$f'(2)=4A+B=3$ [①より]

$B=3-4A$

従って $f(x)=Ax^2+(3-4A)x+C$

$f(2t+2)=A(2t+2)^2+(3-4A)(2t+2)+C$

$=4At^2+6t+(6-4A+C)$

$J=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{4At^2+6t+(6-4A+C)\}\sin t\,dt$

ここで $t^2\sin t$, $\sin t$は奇関数

$t\sin t$は偶関数だから

$J=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}6t\sin t\,dt$

$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$

$=24\left\{\left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)dt\right\}$

$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=24\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=24$

講評

ほとんどが典型問題であり、解き易い。その中で 1 (2) 2 (2) 4 (1) は工夫が必要で差のつく問題である。