2021 慈恵医大 数学解答

1.

A …… 白玉を出す $\left(\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\right)$
B …… 赤一白を出す $\left(\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\right)$ とする

(ア) 球の個数が7個となるのは

Aが3回, Bが2回

左から3個目の球が赤となるので

(i) $A \longrightarrow A \longrightarrow B \begin{cases} \nearrow A \longrightarrow B \\ \searrow B \longrightarrow A \end{cases}$

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times{}_2C_1\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{3^5}$$

(ii) $B \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow A$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{3^5}$$

(i) または (ii) だから $\dfrac{16+8}{3^5}=\dfrac{24}{3^5}=\dfrac{8}{3^4}=\dfrac{8}{81}$

(イ) Bの回数で分類する

(i) Bが1回で左から5個目が赤だから

$A \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow B$ $\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}=\frac{16}{3^5}$

(ii) Bが2回で左から5個目が赤

$$\begin{cases} A \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B \\ A \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow B \end{cases},\ {}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{3^4}$$

$$=\frac{36}{3^5}$$

(iii) Bが3回で左から5個目が赤

$B \longrightarrow B \longrightarrow B$ $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{9}{3^5}$

(i) または (ii) または (iii) だから

$$\frac{16+36+9}{3^5}=\frac{61}{243}$$

2.

(1) $y=e^{x^2}$ より

$x^2=\log y$

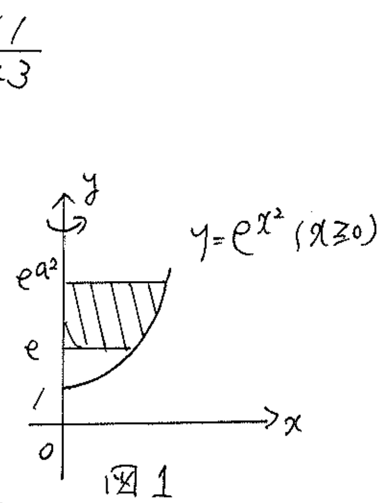


図1

図1の斜線部分を

y軸回りに回転するので,

その体積 V は

$$\frac{V}{\pi}=\int_e^{e^{a^2}}\log y\,dy$$

$$=\left[y\log y-y\right]_e^{e^{a^2}}$$

$$=(e^{a^2}\log e^{a^2}-e^{a^2})-(e\log e-e)$$

$$=a^2e^{a^2}-e^{a^2}$$

$$=e^{a^2}(a^2-1)$$

従って, $V=\pi e^{a^2}(a^2-1)$

(2) $y=e^{x^2}$ より $\dfrac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$

$(a,\ e^{a^2})$ $(a>1)$ における接線は

$$y-e^{a^2}=2ae^{a^2}(x-a)$$

$$y=e^{a^2}\{2a(x-a)+1\}$$

$$y=e^{a^2}\{2ax-(2a^2-1)\}\ \text{----}\ ①$$

①で $y=0$ とすると

$2ax-(2a^2-1)=0$ $x=\dfrac{2a^2-1}{2a}$

図2の斜線部分が

S_2 だから

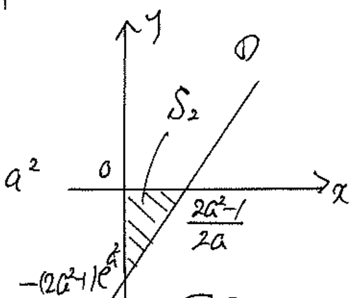


図2

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2-1}{2a}\cdot(2a^2-1)e^{a^2}$$

$$=\frac{(2a^2-1)^2}{4a}e^{a^2}$$

図3の斜線部分が

S_1 だから

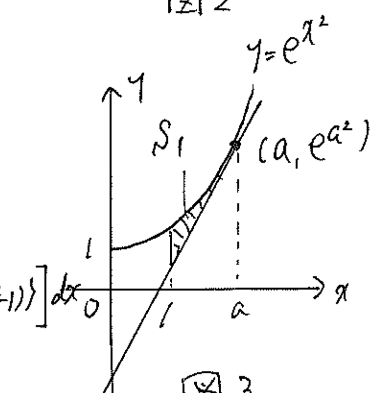


図3

$$S_1=\int_1^a\left[e^{x^2}-e^{a^2}\{2ax-(2a^2-1)\}\right]dx$$

$$=\int_1^a e^{x^2}dx-e^{a^2}\int_1^a\{2ax-(2a^2-1)\}dx$$

$$=\int_1^a e^{x^2}dx-e^{a^2}\left[ax^2-(2a^2-1)x\right]_1^a$$

$$=\int_1^a e^{x^2}dx-e^{a^2}\{(a^3-a)-(2a^2-1)(a-1)\}$$

$$=\underline{\underline{\int_1^a e^{x^2}dx}}+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)$$

ここで $1\leqq x\leqq a$ のとき

$e \leqq e^{x^2} \leqq e^{a^2}$ だから

$\int_1^a e\,dx < \int_1^a e^{x^2}dx < \int_1^a e^{a^2}dx$

$e(a-1) < \underline{\underline{\int_1^a e^{x^2}dx}} < e^{a^2}(a-1)$

従って

$e(a-1)+e^{a^2}(a^3-2a^2+1) < \int_1^a e^{x^2}dx + e^{a^2}(a^3-2a^2+1)$

$< e^{a^2}(a-1)+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)$

$e(a-1)+e^{a^2}(a^3-2a^2+1) < S_1 < e^{a^2}(a-1)+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)$

これより $\dfrac{S_1}{S_2}$ は

$$\frac{e(a-1)+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)}{\frac{(2a^2-1)^2}{4a}e^{a^2}} < \frac{S_1}{S_2} < \frac{e^{a^2}(a-1)+e^{a^2}(a^3-2a^2+1)}{\frac{(2a^2-1)^2}{4a}e^{a^2}}$$

左辺 $= \dfrac{4ea(a-1)}{(2a^2-1)e^{a^2}} + \dfrac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}$

$\longrightarrow 0+1=1 \quad (a\to\infty)$

右辺 $= \dfrac{4a(a-1)}{(2a^2-1)^2} + \dfrac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}$

$\longrightarrow 0+1=1 \quad (a\to\infty)$

「ハサミウチ」より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=1$$

3.

$\cos x \leqq \cos 2ax$ ---- ①

$\sin 2ax \leqq 0$ ---- ②

($a \geqq 2$ の自然数 , $0 < x \leqq \pi$)

①,②が成立する a は

$2\pi - x \leqq 2ax \leqq 2\pi$

$4\pi - x \leqq 2ax \leqq 4\pi$

$6\pi - x \leqq 2ax \leqq 6\pi$

⋮

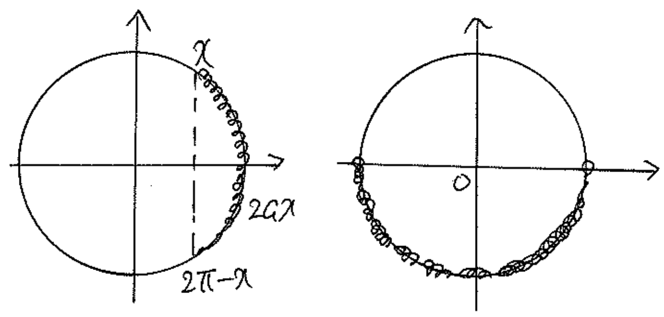
つまり $\dfrac{2\pi}{2a+1} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{a}$

$\dfrac{4\pi}{2a+1} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{a}$

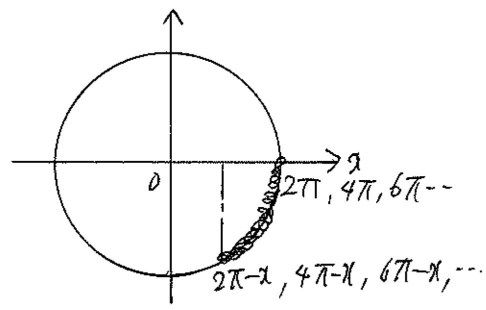
$\dfrac{6\pi}{2a+1} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{a}$

⋮

従って $\dfrac{2a\pi}{2a+1} \leqq x \leqq \dfrac{a\pi}{a}$ ----- ※1



共通部分は



(1) (※)より

$\dfrac{2n\pi}{2a+1} \leqq x \leqq \dfrac{n\pi}{a}$ だから

$n=a$ で

$x_k = \dfrac{k\pi}{a} - \dfrac{2k\pi}{2a+1} = \dfrac{k\pi}{a(2a+1)}$

$\theta_k = 2b(2a+1)x_k$

$= 2b(2a+1)\dfrac{k\pi}{a(2a+1)}$

$= 2k\pi\cdot\dfrac{b}{a} \quad (k=1,2,3,\text{——},a)$

(2) $kb = aq_k + r_k$ ·····(※)

$ib = aq_i + r_i$ ---- ③

$jb = aq_j + r_j$ --- ④ $\quad (1 \leqq i < j \leqq a)$

$r_i = r_j$ と仮定すると ③−④を作ると

$(i-j)b = a(q_i - q_j)$

a と b は互いに素だから

$$\begin{cases} q_i - q_j = lb \\ i - j = la \end{cases} \quad (l \text{は整数}) \quad \cdots ⑤$$

ここで $1 \leqq i \leqq a,\ 1 \leqq j \leqq a$ だから

$0 \leqq |i-j| \leqq a-1$

⑤より $|i-j| = |la| \geqq a$

不合理だから $r_i \neq r_j$

次に $0 \leqq m \leqq a-1$ に対して (※)より

$kb = aq + m$ (qは整数)

とおく

$\dfrac{kb}{a} = q + \dfrac{m}{a}$ だから

$\theta_k = 2\pi \cdot \dfrac{kb}{a} = 2\pi\left(q + \dfrac{m}{a}\right)$

$= 2\pi q + \dfrac{2\pi m}{a}$

このとき

$\cos\theta_k = \cos\left(2\pi q + \dfrac{2\pi m}{a}\right)$

$= \cos\dfrac{2\pi m}{a}$

$\sin\theta_k = \sin\left(2\pi q + \dfrac{2\pi m}{a}\right)$

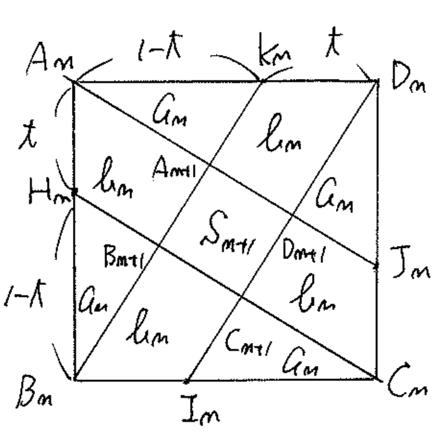
$= \sin\dfrac{2\pi m}{a}$

$(m = 0, 1, 2, \cdots, a-1)$

$(\cos\theta_k, \sin\theta_k)$ の a 個の点は

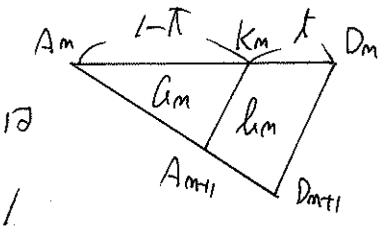
単位円を a 等分する a 個の分点である。

4.



$\triangle A_n A_{n+1} K_n = a_n$. 台形 $K_n A_{n+1} D_{n+1} D_n = b_n$

正方形 $A_n B_n C_n D_n = S_n$ とおく



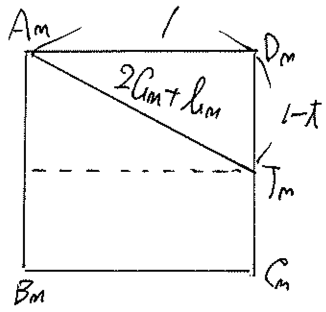
相似から，面積比は

$a_n : a_n + b_n = (1-t)^2 : 1$

$a_n = (1-t)^2 (a_n + b_n)$

$(1-t)^2 b_n = \{1 - (1-t)^2\} a_n = (2t - t^2) a_n$

$b_n = \dfrac{2t - t^2}{(1-t)^2} a_n \quad \cdots ①$



また

$2a_n + b_n = \dfrac{1}{2}(1-t) S_n$ だから

①を代入して

$2a_n + \dfrac{2t - t^2}{(1-t)^2} a_n = \dfrac{1-t}{2} S_n$

$\dfrac{2(1-t)^2 + 2t - t^2}{(1-t)^2} a_n = \dfrac{1-t}{2} S_n$

$a_n = \dfrac{(1-t)^3}{2(t^2 - 2t + 2)} S_n \quad \cdots ②$

ここで $S_1 = 1$ だから $a_1 = \dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}$

次に

$S_{n+1} = S_n - 4(a_n + b_n) \quad \cdots ③$

①，②より $b_n = \dfrac{2t - t^2}{(1-t)^2} \cdot \dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)} S_n$

$= \dfrac{(2t - t^2)(1-t)}{2(t^2-2t+2)} S_n$

③へ代入して

$S_{n+1} = S_n - 4\left\{\dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)} + \dfrac{(2t-t^2)(1-t)}{2(t^2-2t+2)}\right\} S_n$

$= S_n - \dfrac{2(1-t)}{t^2-2t+2} S_n$

$= \left\{1 - \dfrac{2(1-t)}{t^2-2t+2}\right\} S_n$

$= \dfrac{t^2}{t^2-2t+2} S_n$

②より

$a_{n+1} = \dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)} S_{n+1}$

$= \dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)} \dfrac{t^2}{t^2-2t+2} S_n$

$$= \frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)} \cdot \frac{t^2}{t^2-2t+2} \cdot \frac{2(t^2-2t+2)}{(1-t)^3} a_n \quad [②より]$$

つまり $a_{n+1} = \dfrac{t^2}{t^2-2t+2} a_n$

$\{a_n\}$は 初項 $\dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}$

公比 $\dfrac{t^2}{t^2-2t+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}}{1-\frac{t^2}{t^2-2t+2}}$$

$$= \frac{(1-t)^3}{2(2-2t)} = \frac{(1-t)^2}{4}$$

条件から，これが $\dfrac{1}{8}$ となるので

$$\frac{(1-t)^2}{4} = \frac{1}{8}$$

$$2(1-t)^2 = 1$$

$0 < t < 1$ だから

$$1-t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[講評]

今年は大問4題の出題である.

1. 確率計算

2. 回転体の体積と面積比の極限

3. 三角不等式の成立する範囲と余りの異なることの証明，及び単位円をn等分することの証明

4. 無限級数の和が一定となる時の定数の値

1の確率計算と 2(1)，3(1)は比較的取り組み易い，しかし 2(2) 4の計算は難かしく，3(2)の証明の文章も受験生には書きづらい．従って，合格点もだいぶ下がると思われる