東京慈恵会医科大学　医　2022

1

解説

白玉を W、赤玉を R とする

(ア)

1 回目

(ⅰ) A：WRR　B：WWR　(ⅱ) A：WWW　B：RRR　(ⅲ) A：WWRR　B：WR

2 回目

(ⅰ) A：WRW　B：WRR　(ⅱ) A：WWR　B：RRW　(ⅲ) A：WWWR　B：RR

となればよいので、それぞれの確率は

(ⅰ)：$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$　(ⅱ)：$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot1=\frac{1}{9}$　(ⅲ)：$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$

よって、$\frac{16}{81}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{59}{162}$　…(答)

(イ)

1 回目

(ⅰ) A：WRR　B：WWR　(ⅱ) A：WWW　B：RRR

2 回目

(ⅰ) A：WRW　B：WRR　(ⅱ) A：WWR　B：RRW

3 回目

(ⅰ) A：WWW　B：RRR　(ⅱ) A：WWW　B：RRR

となればよいので、それぞれの確率は

(ⅰ)：$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{9}$　(ⅱ)：$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$

よって、$\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{25}{729}$　…(答)

$\boxed{2}$

解説

(1)　$x>-a$ のとき $f(x)=\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ 、$f'(x)=\dfrac{-ax+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

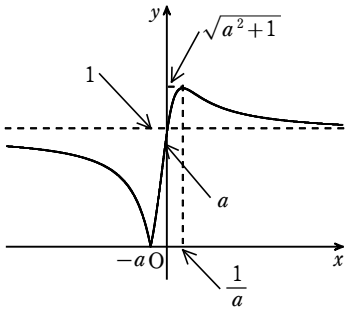
$x<-a$ のとき $f(x)=-\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ 、$f'(x)=\dfrac{ax-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

なので、$\displaystyle\lim_{x\to-a+0}f'(x)=\frac{a^2+1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}$、$\displaystyle\lim_{x\to-a-0}f'(x)=\frac{-a^2-1}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}$

より、$f'(-a)$ は存在しないので微分可能でない。

(2)　(1) より、$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{a}+a}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+1}}=\sqrt{a^2+1}$ なので、$f(x)$ の増減は次のようになる。

x		$-a$		$\dfrac{1}{a}$	
$f'(x)$	$-$	\	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\sqrt{a^2+1}$	↘



さらに、$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{a}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-a}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\dfrac{a}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$　なので

$f(x)$ のグラフは右上のようになる。よって、$x=\dfrac{1}{a}$ のとき最大値 $\sqrt{a^2+1}$

これが $\sqrt{2}$ となるので、$a=1$　…　(答)

(3)　$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{0}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx$

$$=\pi\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\pi\Big[x+\log(x^2+1)\Big]_{-1}^{0}$$

$$=\pi(1-\log 2)\quad\cdots\quad(答)$$

$\boxed{3}$

解説

p を 2 以外の素数とする。

(1)　[1]　$m=p^2$ のとき、

$a_1=1$、$a_2=p$、$a_3=p^2$ となり、$k=3$ である。このとき $m={a_2}^2$

[2]　q を素数 $(p<q)$ として、$m=pq$ のとき、

$a_1=1$、$a_2=p$、$a_3=q$、$a_3=pq$ となり、$k=4$ である。

また、 $a_3-a_2\leqq 3$ なので、$q-p\leqq 3$ となり、 $q=p+1\,,\,p+2\,,\,p+3$ の場合があるが、

$p+1\,,\,p+3$ は偶数で $p+2$ は奇数なので、$q=p+2$

したがって、$a_1=1$、$a_2=p$、$a_3=p+2$、$a_3=p(p+2)$ となり、

$m=p(p+2)=a_2(a_2+2)$

[3]　r を素数 $(p<q<r)$ として、m が 3 つ以上の素数の積で表されるとき

$m\geqq pqr$ 、$a_{k-1}\geqq pq$

$a_{k-1}-a_2\geqq pq-p=p(q-1)\geqq 3\cdot 2>3$ となり、条件に反する。

したがって、$k=3$ $(m={a_2}^2)$ または $k=4$ $(m=a_2(a_2+2))$ となる。

(2)　(1) より、$k=3$ のとき、$a_2=p$、 $m=p^2$

このとき、

$$
\begin{aligned}
(a_2n+1)^{a_2}-1=(pn+1)^p-1&={}_pC_0(pn)^p+{}_pC_1(pn)^{p-1}+\cdots+{}_pC_{p-1}pn+{}_pC_p(pn)^0-1\\
&=p^2({}_pC_0p^{p-2}n^p+{}_pC_1p^{p-3}n^{p-1}+\cdots+n)\\
&=m\,({}_pC_0p^{p-2}n^p+{}_pC_1p^{p-3}n^{p-1}+\cdots+n)
\end{aligned}
$$

より、すべての正の整数 n について $(a_2n+1)^{a_2}-1$ は m の倍数である。

$\boxed{4}$

解説

(1)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと、

$$w=\cos\theta+i\sin\theta+\frac{2}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta+2(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$\therefore\quad w=3\cos\theta-i\sin\theta$

$\therefore\quad u=3\cos\theta$、$v=-\sin\theta$

よって、$\dfrac{u^2}{9}+v^2=1$　…　(答)

(2)　直交座標に直して考える。C で囲まれた部分の内部は (1) より、$\dfrac{x^2}{9}+y^2<1$

α の座標を (a, b) とすると、$\dfrac{a^2}{9}+b^2<1$　…　①

この点を通り、y 軸に平行でないものの直線 l の方程式を $y=m(x-a)+b$ とおくと、

$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ と連立して、$\dfrac{x^2}{9}+\{mx+(-ma+b)\}^2=1$　これを展開して整理すると、

$(9m^2+1)x^2-18m(ma-b)x+9m^2a^2-18abm+9b^2-9=0$

この方程式の 2 解を x_1、x_2 $(x_1<x_2)$ として、解と係数の関係より

$x_1+x_2=\dfrac{18m(ma-b)}{9m^2+1}$、$x_1x_2=\dfrac{9m^2a^2-18abm+9b^2-9}{9m^2+1}$

ここで、直線 l と x 軸となす角をθとおくと $\tan\theta=m$ なので

積 $|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|$ は

$$\frac{x_1-a}{\cos\theta}\cdot\frac{a-x_2}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}(-x_1x_2+a(x_1+x_2)-a^2)$$

$$=(1+m^2)\left(-\frac{9m^2a^2-18abm+9b^2-9}{9m^2+1}+\frac{18m(ma-b)}{9m^2+1}a-a^2\right)$$

$$=\frac{m^2+1}{9m^2+1}\cdot(9-a^2-9b^2)$$

ここで、① より、$9-a^2-9b^2>0$ なので、$f(m)=\dfrac{m^2+1}{9m^2+1}$ が最大となる m を求める。

$f'(m)=-\dfrac{16m}{(9m^2+1)^2}$ より、次表を得る。

m		0	
$f'(m)$	$+$	0	$-$
$f(m)$	↗		↘

よって、$m=0$ のとき $f(m)$ は最大となる。なお、l が y 軸に平行になるときは $m\to\infty$ で $f(m)$ は明らかに最大とならない。

以上より、l は点 α を通り、実軸に平行な直線となるとき積 $|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|$ は最大となる。

…　(答)