2022 埼玉医大（後期） 数学 解答

1

問1) $-\pi<\theta<\pi$

$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$

$=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

ここで $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\frac{\theta}{2}>0$ だから

$r=2\cos\frac{\theta}{2},\ \alpha=\frac{\theta}{2}$

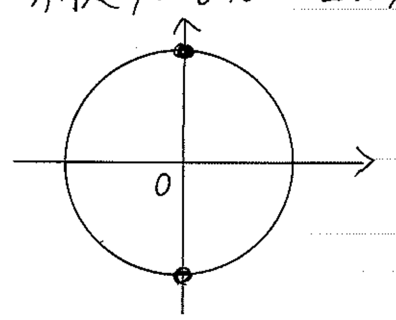
次に $z^{32}=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{32}(\cos16\theta+i\sin16\theta)$

これが純虚数だから

$\cos16\theta=0$ ……①

$-16\pi<16\theta<16\pi$ だから

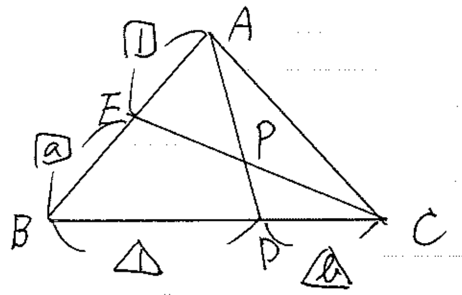
①を満足するθは $2\times16=32$ 個



$\cos x=0$ となる個数は

$2k\pi<x<2(k+1)\pi$ では2個ある

問2)



メネラウスの定理から

$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$

$\frac{1+b}{b}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{1}{a}=1$

$\longrightarrow \frac{AP}{PD}=\frac{1+b}{ab}$

次に $\frac{BA}{AE}\cdot\frac{EP}{PC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$

$\frac{a+1}{1}\cdot\frac{EP}{PC}\cdot\frac{b}{1}=1$

$\frac{EP}{PC}=\frac{1}{(a+1)b}$

$\triangle ABC=S$ とおくと

$\triangle AEC=\frac{1}{a+1}S$

$\triangle APE=\frac{1}{1+(a+1)b}\triangle AEC$

$=\frac{1}{1+(a+1)b}\cdot\frac{1}{a+1}S$

条件から $\triangle APE:\triangle ABC=1:30$ だから

$\{1+(a+1)b\}(a+1)=30$

$(a+1)^2b+(a+1)=30$

$b=5-a$ だから

$(a+1)^2(5-a)+(a+1)=30$

式を整理して

$a^3-3a^2-10a+24=0$

$(a-2)(a^2-a-12)=0$

$(a-2)(a-4)(a+3)=0$

$a>0$ だから $a=2,\ 4$

$\begin{cases} a=2 \text{ のとき } & b=5-2=3 \\ a=4 \text{ のとき } & b=5-4=1 \end{cases}$

2

$f(x)=\frac{1}{x+a}-a \quad (x>-a,\ a>0)$

$y=\frac{1}{x+a}-a \Longrightarrow (x+a)(y+a)=1$

x と y を交換しても元と同じだから

$y=f(x)$ は直線 $y=x$ 対称

(1) $y=f(x)$ は $y=\frac{1}{x}$ を x 方向へ $-a$ y 方向へ $-a$ 平行移動したもの

だから ④

(2) $f(1)=0$ だから

$\frac{1}{1+a}-a=0$

$a^2+a-1=0$

$a>0$ だから $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(3) $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$ …… (※)

$y=f(x)$ と $y=x$ を連立させると

$\frac{1}{x+a} - a = x$

$1 - ax - a^2 = x(x+a)$

$x^2+2ax+a^2=1$

$(x+a)^2=1$

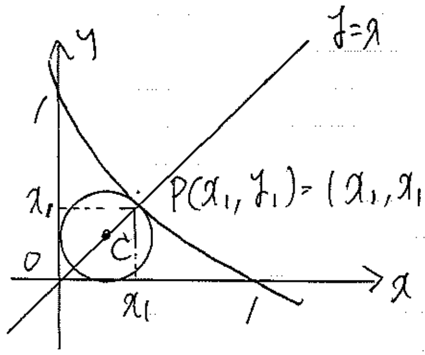
$x+a>0$ だから $x+a=1$

これが x_1 だから $x_1+a=1$

従って (※)に x_1 を代入して

$f'(x_1) = -\frac{1}{(x_1+a)^2} = -\frac{1}{1^2} = -1$

(4)



$y=f(x)$ のグラフが $y=x$ 対称だから

領域Aに含まれる円のうち、半径が最大となるのは両軸に接するとき、

このとき、円の半径をrとすると中心は

C(r, r) とおける。

円の式は $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

$P(x_1, y_1)=(x_1, x_1)$ が円上にあるので

$(x_1-r)^2+(x_1-r)^2=r^2$

$2(x_1^2-2x_1r+r^2)=r^2$

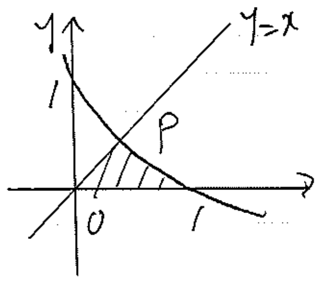
$r^2-4x_1r+2x_1^2=0$

$r=2x_1\pm\sqrt{2}\,x_1$

図から $r<x_1$ だから

$r=(2-\sqrt{2})x_1$

問2)



グラフの対称性（$y=x$ 対称）より

$S = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+a}-a\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\log(x+a)-ax\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(\log(1+a)-\log a-a\right)$

$= \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{a}-\frac{1}{2}a$

ここで $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ だから

$\frac{a+1}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$S=\frac{1}{2}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$=\log\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$=\log\left\{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2}\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$=\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{3}$

$S_n=\frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n+6)$ （$n\geqq 1$ の整数）

問1) $a_1=S_1=\frac{1}{3}(1+3+2+6)=\frac{12}{3}=4$

$S_2=\frac{1}{3}(8+12+4+6)=\frac{30}{3}=10$

$S_2=a_1+a_2$ だから

$4+a_2=10$　　$a_2=6$

問2)

$n\geqq 2$ として

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n+6)$

$-\frac{1}{3}\{(n-1)^3+3(n-1)^2+2(n-1)+6\}$

$=\frac{1}{3}\{n^3-(n-1)^3\}+\{n^2-(n-1)^2\}+2\{n-(n-1)\}$

$=n^2+n$ ……①

ので $n=1$ とすると $1^2+1=2$

$a_1=4$ と一致しないので

$$a_n=\begin{cases} 4 & (n=1) \\ n(n+1) & (n\geqq 2)\end{cases}$$

$a_n=264$ となるので

$n(n+1)=264=21\times 22$

従って $n=21$

問3) $n\geqq 2$ のとき $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$Q_n=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$$

$$=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{7n+3}{4(n+1)}$$

4

問1) A：非感染者から1人選んだとき感染する可能性のある人

B：過去に感染しておらず、ワクチンを受けた人

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{(1-p_0)\gamma v}{(1-p_0)\gamma v+p_0} \quad \text{---(※)}$$

$\gamma=\frac{9}{10}$, $v=\frac{3}{5}$, $p_0=\frac{1}{5}$ を(※)へ代入

$$(※)=\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 3}{2\cdot 9\cdot 3+25}=\frac{54}{79}$$

問2) 条件は $D<0$

$D=a(1-p)SI-bI<0$ ---(#)

ここで $p=(1-p_0)\gamma v+p_0$ で $p_0=0$ だから

$p=\gamma v$

また $I=1$ だから (#)は

$$a(1-\gamma v)S-b<0$$

$$\frac{aS}{b}(1-\gamma v)-1<0$$

$\frac{aS}{b}=\frac{12}{5}$, $\gamma=\frac{9}{10}$ だから

$$\frac{12}{5}\left(1-\frac{9}{10}v\right)-1<0$$

$$1-\frac{9}{10}v<\frac{5}{12}$$

$$\frac{9}{10}v>\frac{7}{12}$$

$$v>\frac{7}{12}\cdot\frac{10}{9}=\frac{35}{54}$$

問1の注

A	B
非感染者のうち過去に感染	非感染者のうち、過去に感染しておらずワクチン接種

非感染者で感染する可能性が多い

条件付き確率は

$$\frac{B}{A+B}$$