Windomの解答速報 日本大N1(2次) 数学

1

(1)

【答】$x=\pm1,2$

【解答】

$$x^3+2x^2+3x+2=4x+4 \Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x+2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)=0$$

よって、$x=\pm1,-2$

(2)

【答】$n\equiv\pm1,2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ で $f(n)\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ を示す。

【解答】

n が4の倍数出ないとき $n\equiv\pm1,2\ (\mathrm{mod}\ 4)$に限る。

[1] $n\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4)$の時。

$f(n)\equiv1+2+3+2=8\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 4)$　よって、$f(n)$ は4の倍数。

[2] $n\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ 4)$の時。

$f(n)\equiv-1+2-3+2=0\ (\mathrm{mod}\ 4)$　よって、$f(n)$ は4の倍数。

[3] $n\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 4)$の時。

$f(n)\equiv8+8+6+2=24\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 4)$　よって、$f(n)$ は4の倍数。

以上より、自然数 n が4の倍数でないならば, $f(n)$ は4の倍数である。

2

【答】

(1)　$(2,2a+2)$　(2)　$a=\frac{1}{3}$　(3)　$S(a)=\frac{2}{3}\left(3a^2+7a+5+\frac{1}{a}\right)$, 最小値$=\frac{64}{9}$

【解答】

$P: y=ax^2-ax+2=f(x)$　　$H: y=\frac{4}{x}+2a=g(x)$

とおく。

(1)　$f(x)=g(x)$ より

$$ax^2-ax+2=\frac{4}{x}+2a \Leftrightarrow ax^3-ax^2+2x=4+2ax$$
$$\Leftrightarrow a(x^3-x^2-2x)+2x-4=0\ ax(x-2)(x+1)+2(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(ax^2-2ax+2)=0$$

$0<a<8$ より $ax^2-2ax+2=0$は x の二次方程式であり, 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-8a=a(a-8)<0\quad(\because 0<a<8 \text{ より})$$

よって、実数解は $x=2$ となり交点の x 座標となる。

$f(2)=g(2)=2a+2$ より交点の座標は$\mathrm{N}(2,2a+2)$ となる。

(2)　$f'(x)=2ax-a$,　$g'(x)=-\frac{4}{x^2}$

より、$f'(2)=4a-a=3a$, $g'(2)=-\frac{4}{4}=-1$ となる。

Nでℓ と m が垂直に交わるので

$$f'(2)\cdot g'(2)=-1 \Leftrightarrow 3a\cdot(-1)=(-1) \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$

(3)　$\mathrm{N}(2,2a+2)$と $f'(2)=3a$, $g'(2)=-1$より

ℓ: $y-(2a+2)=3a(x-2) \Leftrightarrow y=3ax-4a+2 \cdots$ ①

m : $y-(2a+2)=-(x-2) \Leftrightarrow y=-x+2a+4 \cdots$ ②

①において $y=0$ とすると　$3ax=4a-2 \Leftrightarrow x=\frac{4a-2}{3a}$

②において $y=0$ とすると　$x=2a+4$

$\mathrm{A}\left(\frac{4a-2}{3a},0\right)$, $\mathrm{B}(2a+4,0)$ とおく。

$$S(a)=\frac{1}{2}\left\{(2a+4)-\frac{4a-2}{3a}\right\}(2a+2)=\left\{(a+2)-\frac{2a-1}{3a}\right\}(2a+2)$$
$$=\frac{3a^2+6a-(2a-1)}{3a}(2a+2)=\frac{2(3a^2+4a+1)(a+1)}{3a}$$
$$=\frac{2(3a^3+7a^2+5a+1)}{3a}=\frac{2}{3}\left(3a^2+7a+5+\frac{1}{a}\right)$$

よって、

$$S'(a)=\frac{2}{3}\left(6a+7-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{2(6a^3+7a^2-1)}{3a^2}=\frac{2(a+1)(6a^2+a-1)}{3a^2}$$
$$=\frac{2(a+1)(2a+1)(3a-1)}{3a^2}$$

よって、$0<a<8$ における増減表は以下の通り。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	8
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

ゆえに$S(a)$は $a=\frac{1}{3}$ で極小かつ最小。

$$S(a)\text{の最小値}=S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{3}+5+3\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{9}$$

3

【答】(1)　$x>\dfrac{18}{\sqrt{65}}$　(2)　証明略　$\dfrac{5}{36}$　(3)　$\dfrac{12}{\sqrt{5}}$

【解答】

(1)　OPの傾き$=\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta$

[1] $\tan\theta=0$の時。

OPは $y=0$ であり、OQは $x=0$ 上となるが、この直線は双曲線 H と交わらないのでQは存在しない。

[2] $\tan\theta\fallingdotseq 0$の時。

OP⊥OQよりOQの傾きは $-\dfrac{1}{\tan\theta}$ となる。よってOQの式は

$$y=-\frac{1}{\tan\theta}x$$

となる。これが双曲線H:$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow 9x^2-4y^2=36$ と共有点を持てばよい。これらを連立して

$$9x^2-\frac{4}{\tan^2\theta}x^2=36 \Leftrightarrow \frac{9\tan^2\theta-4}{\tan^2\theta}x^2=36\Leftrightarrow x^2=\frac{36\tan^2\theta}{9\tan^2\theta-4}$$

$x\geqq 2$ より$x^2\geqq 4>0$であることと $\tan^2\theta>0$ より

$$9\tan^2\theta-4>0\Leftrightarrow(3\tan\theta+2)(3\tan\theta-2)>0$$

$$\Leftrightarrow\tan\theta<-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<\tan\theta\ \cdots ①$$

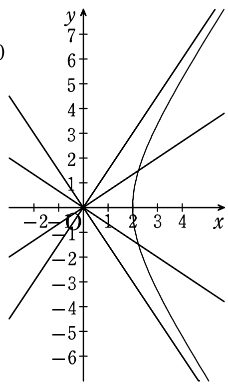
H:$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の漸近線は

$$y^2=\frac{9}{4}x^2 \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{2}x$$

であるから

$$-\frac{3}{2}<\text{OPの傾き}<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<\tan\theta<\frac{3}{2}\cdots ②$$



①かつ②よりPが存在する時の $\tan\theta$ の存在する範囲は

$$\frac{-3}{2}<\tan\theta<-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<\tan\theta<\frac{3}{2}\cdots ③$$

となる。 $y=\pm\dfrac{2}{3}x$と 双曲線H:$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$との交点の x 座標は

$$\frac{x^2}{4}-\frac{4}{81}x^2=1\Leftrightarrow 81x^2-16x^2=324\Leftrightarrow 65x^2=324\Leftrightarrow x^2=\frac{324}{65}$$

$x\geqq 2$ より$x=\dfrac{18}{\sqrt{65}}$ となる。よって、Pの x 座標の取り得る範囲は

$x>\dfrac{18}{\sqrt{65}}$ となる。

(2)　P$(r\cos\theta,r\sin\theta)$が双曲線 H:$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow 9x^2-4y^2=36$ 上にあるとき

$$9r^2\cos^3\theta-4\sin^2\theta=36\Leftrightarrow 9r^2\cos^3\theta-4(1-\cos^2\theta)=36$$

$$\Leftrightarrow r^2(13\cos^2\theta-4)=36\Leftrightarrow r^2=\frac{36}{13\cos^2\theta-4}=f(\theta)$$

とおく。よって、

$$\frac{1}{\text{OP}^2}+\frac{1}{\text{OQ}^2}=\frac{1}{f(\theta)}+\frac{1}{f\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{13\cos^2\theta-4}{36}+\frac{13\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)-4}{36}=\frac{13\cos^2\theta+13\sin^2\theta-8}{36}$$

$$=\frac{13-8}{36}=\frac{5}{36}$$

となりθによらず一定となる。

(3)　∠POQ$=90°$ゆえ三平方に定理より

$$\text{PQ}^2=\text{OP}^2+\text{OQ}^2=f(\theta)+f\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{36}{13\cos^2\theta-4}+\frac{36}{13\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)-4}=\frac{36}{13\cos^2\theta-4}+\frac{36}{13\sin^2\theta-4}$$

$$=\frac{36}{13\cos^2\theta-4}+\frac{36}{13(1-\cos^2\theta)-4}=\frac{36}{13\cos^2\theta-4}+\frac{36}{9-13\cos^2\theta}\cdots ④$$

$x=\cos^2\theta$ とおく。③より

$$\frac{4}{9}<\tan^2\theta<\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{4}{9}<\frac{1}{\cos^2\theta}-1<\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{13}{9}<\frac{1}{\cos^2\theta}<\frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{13}<\cos^2\theta<\frac{9}{13}$$

ゆえ $\dfrac{4}{13}<x<\dfrac{9}{13}\cdots$⑤であり

$$\text{PQ}^2=\frac{36}{13x-4}+\frac{36}{9-13x}=g(x)$$

とおく。

$$g'(x)=36\left\{\frac{-13}{(13x-4)^2}+\frac{13}{(9-13x)^2}\right\}=36\cdot 13\left\{\frac{-(9-13x)^2+(13x-4)^2}{(13x-4)^2(9-13x)^2}\right\}$$

$$=36\cdot 13\left\{\frac{-9^2+2\cdot 9\cdot 13x-13^2x^2+13^2x^2-2\cdot 4\cdot 13x+4^2}{(13x-4)^2(9-13x)^2}\right\}$$

$$=36\cdot 13\left\{\frac{130x-65}{(13x-4)^2(9-13x)^2}\right\}$$

$g'(x)=0$ を解くと $x=\dfrac{1}{2}$ (これは⑤を満たす)となりここで $g(x)$ は極小かつ最小となる。

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{36}{\frac{13}{2}-4}+\frac{36}{9-\frac{13}{2}}=\frac{36}{\frac{5}{2}}+\frac{36}{\frac{5}{2}}=\frac{144}{5}$$

ゆえに、PQの最小値$=\dfrac{12}{\sqrt{5}}$ となる。