Windom の解答速報 昭和大(Ⅰ期) 数学

1

(1)

【答】

(1−1)　$a_1=1, a_2=3, a_3=4, a_4=7$　(1−2)　$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$　(1−3)　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解答】

(1−1)　$x^2-x-1=0$ の解がα, βなので解と係数の関係より　$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\cdots①$

①より

$a_1=\alpha+\beta=1$　$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=1+2=3$

$a_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-1)\cdot1=1+3=4$

$a_4=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=3^2-2\cdot(-1)^2=9-2-7$

(1−2)　α, βは $x^2-x-1=0$ の解なので、

$\alpha^2-\alpha-1=0\cdots②$　　$\beta^2-\beta-1=0\cdots③$

②$\times\alpha^{n-2}$+③$\times\beta^{n-2}$ より

$(\alpha^n+\beta^n)-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=0$

$a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$　　$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\cdots④$

[注意](1−1)は $a_1=1, a_2=3$と④を用いて

$a_3=a_2+a_1=3+1=4,$　　$a_4=a_3+a_2=4+3=7$

と求めてもよい。

(1−3)　$x^2-x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ なので、$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ より $-1<\dfrac{\alpha}{\beta}<0$ ゆえ、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$ となる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}=\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(2)

【答】

(2−1)　$S_1=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$　(2−2)　$S_2=\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

(2−3)　$S_3=\dfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

【解答】

図1	1	2	3	…	$n-1$	n
1	1^2	$1\cdot2$	$1\cdot3$		$1\cdot(n-1)$	$1\cdot n$
2	$2\cdot1$	2^2	$2\cdot3$		$2\cdot(n-1)$	$2\cdot n$
3	$3\cdot1$	$3\cdot2$	3^3		$3\cdot(n-1)$	$3\cdot n$
…						
$n-1$	$(n-1)\cdot1$	$(n-1)\cdot2$	$(n-1)\cdot3$		$(n-1)^2$	$(n-1)n$
n	$n\cdot1$	$n\cdot2$	$n\cdot3$		$n\cdot(n-1)$	n^2

(2−1)　求める和を$S_1=\sum\limits_{1\leq j,k\leq n}jk$ とする。

求める和は図1の$n\times n$マスの中の数字の総和であり、

$S_1=1\cdot(1+2+\cdots+n)+2\cdot(1+2+\cdots+n)+\cdots+n\cdot(1+2+\cdots+n)$

$=(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

となる。

(2−2)　求める和を$S_2=\sum\limits_{1\leq j<k\leq n}jk$ とする。

求める和は図1の対角線$(1^2, 2^2, \cdots, n^2)$より右上にあるマスの中の数字の総和である。

$S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2+2S_2$ より、

$S_2=\dfrac{1}{2}\left\{S_1-\sum\limits_{i=1}^{n}i^2\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$

$=\dfrac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\dfrac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$=\dfrac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

(2−3)　$j=k-1$の場合を(2−2)の場合から除けばよい。即ち、連続する2整数の積の総和を(b)の答から除けば良い。$T=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(n-1)n$とおく。

$T=\sum\limits_{i=1}^{n-1}i(i+1)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{3}\{i(i+1)(i+2)-(i-1)i(i+1)\}=\dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

求める和をS_3とすると、

$S_3=S_2-T=\dfrac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)-\dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

$=\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)\{(3n+2)-8\}=\dfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

【別解】

(2−1)　$S_1=(1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n)=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(2−2)　j を固定したとき、k は $j+1$ から $j+(n-j)$ までとなる。その総和は

$\sum\limits_{m=1}^{n-j}j(j+m)=\sum\limits_{m=1}^{n-j}(j^2+mj)=j^2(n-j)+\dfrac{j}{2}(n-j)(n-j+1)$

$=\dfrac{1}{2}j(n-j)\{2j+(n-j+1)\}=\dfrac{1}{2}j(n-j)(n+j+1)$

$=\dfrac{1}{2}\{-j^3-j^2+(n^2+n)j\}$

よって、

$S_2=\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{2}\{-j^3-j^2+(n^2+n)j\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{4}(n-1)^2n^2-\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+(n^2+n)\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{12}(n-1)n\{-3(n-1)n-2(2n-1)+6(n^2+n)\}$

$=\dfrac{1}{24}(n-1)n\{3n^2+5n+2\}=\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

(2−3) j を固定したとき、k は $j+2$ から $j+(n-j)$ までとなる。その総和は

$\sum\limits_{m=2}^{n-j}j(j+m)=\sum\limits_{m=2}^{n-j}(j^2+mj)=\sum\limits_{m=1}^{n-j}(j^2+mj)-(j^2+j)$

$=\dfrac{1}{2}\{-j^3-j^2+(n^2+n)j\}-(j^2+j)=\dfrac{1}{2}\{-j^3-3j^2+(n^2+n-2)j\}$

よって、

$S_3=\sum\limits_{j=1}^{n-2}\dfrac{1}{2}\{-j^3-3j^2+(n^2+n-2)j\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{4}(n-2)^2(n-1)^2-\dfrac{3}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)+(n^2+n-2)\cdot\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}(n-2)(n-1)\{-(n-2)(n-1)-2(2n-3)+2(n^2+n-2)\}$

$=\dfrac{1}{8}(n-2)(n-1)\{n^2+n\}=\dfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

2

【答】(1)　$\cos\gamma=\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}}$　(2)　$S=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$

(3)(3−1)　$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$　(3−2)　$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$

【解答】

(1)　O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1), E(1, 0, 1), F(1, 1, 1), G(0, 1, 1)としても一般性は失わない。

$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$より $\mathrm{AP}=\tan\alpha$, $\beta=\angle\mathrm{COR}$より $\mathrm{CR}=\tan\beta$となるので

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1, 0, \tan\alpha)$,　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(0, 1, \tan\beta)$

となるので、

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1+\tan^2\alpha$,　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=1+\tan^2\beta$,　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\tan\alpha\tan\beta$

となる。よって、

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|}=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}}$$

(2)　$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$

$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$

$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$

(3)　$x=\tan\alpha\tan\beta$ とおく。$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\alpha\geqq0$, $\beta\geqq0$ より $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$, $0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{4}$

なので $0\leqq\tan\alpha\leqq1$, $0\leqq\tan\alpha\leqq1$ となる。よって、

$0\leqq x\leqq1$ … ①

$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$より

$1=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\Leftrightarrow$ $\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta=1-x$ … ②

$S=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}=\dfrac{7}{6}$ より

$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$　$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{13}{36}$

$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{13}{36}$　(②を用いると)

$(1-x)^2-2x=\dfrac{13}{36}$　$1-4x+x^2=\dfrac{13}{36}$　$x^2-4x+\dfrac{23}{36}$

$36x^2-144x+23=0$　$(6x-1)(6x-23)=0$　$x=\dfrac{1}{6}, \dfrac{23}{6}$

①より, $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$

②に代入して, $\tan\alpha+\tan\beta=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

3

【答】(1)　$S_1=6\sqrt{6}$　(2)　$r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(3)(3−1)　$S_2=6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2$　(3−2)　$S_3=36t+\left(\pi-\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2$

(4)　$V=\dfrac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}$

【解答】

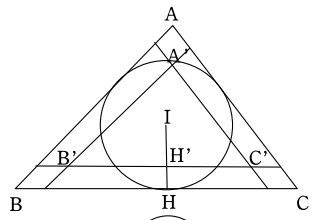
(1)　余弦定理より

$\cos A=\dfrac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

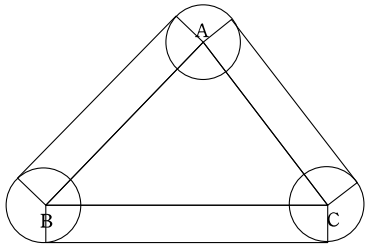
(2)　内接円の半径を r とすると $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$より

$6\sqrt{6}=\dfrac{r}{2}(6+7+5)=9r$　$r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$



(3)(3−1)　三角形ABCの内心をIとする。
三角形ABCの内部で円が通過しない領域は
右図のような三角形A'B'C'となり、
三角形ABCと相似となる。
また、AA'は∠CABの角の二等分線
なので、A,A',Iは一直線上である。
同様B,B',IもC,C',Iも一直線上なので、
Iは三角形A'B'C'の内心にもなる。
IからBC, B'C'に下ろした垂線の足を
それぞれH, H'とするとI,H',Hは
同一直線上で三角形ABCと
三角形A'B'C'の相似比は

$\mathrm{IH}:\mathrm{IH'}=r:r-t$



よって、

$\triangle\mathrm{A'B'C'}=\triangle\mathrm{ABC}\times\left(\dfrac{r-t}{r}\right)^2=6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{t}{r}\right)^2=6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{3}{2\sqrt{6}}t\right)^2$

$=6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2$

(3−2)　円が通過する一番外側の部分を境界線とする図形の面積は

$S=\pi t^2+\triangle\mathrm{ABC}+\mathrm{AB}\times t+\mathrm{BC}\times t+\mathrm{CA}\times t$

$=\pi t^2+6\sqrt{6}+6t+7t+5t=\pi t^2+6\sqrt{6}+18t$

よって、

$S_3=S-S_2=\pi t^2+6\sqrt{6}+18t-6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2$

$=\pi t^2+6\sqrt{6}+18t-6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}t+\dfrac{3}{8}t^2\right)=36t+\left(\pi-\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2$

(4)　半径1の球を原点においたとき $z=s\ (-1\leqq s\leqq1)$で切った切り口の円の半径は $\sqrt{1-s^2}$ であるから球の通過領域を $z=s$ で切ったときの断面積は S_3 で $t=\sqrt{1-s^2}$ として

$S_3(s)=36\sqrt{1-s^2}+\left(\pi-\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-s^2)$

$S_3(s)$は偶関数なので、

$$V=\int_{-1}^{1}S(s)ds=2\int_0^1S(s)ds=2\int_0^1\left\{36\sqrt{1-s^2}+\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-s^2)\right\}ds$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{\pi}{4}$, $\displaystyle\int_0^1(1-s^2)ds=\left[s-\frac{1}{3}s^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$ ゆえ

$$V=2\left\{36\cdot\frac{\pi}{4}+\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\right\}=2\left\{9\pi+\frac{2}{3}\pi-\frac{3}{2}\sqrt{6}\right\}=\frac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}$$

4

【答】(1) $\frac{2}{11}$ (2) $\frac{36}{55}$ (3) $\frac{9}{55}$ (4) $\frac{32}{55}$ (5) $\frac{4}{55}$

【解答】

12枚のカードから4枚のカードを選ぶ選び方は

$${}_{12}C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=11\cdot5\cdot9\text{通り}$$

(1) 4種類から2種類を選ぶ。${}_4C_2=6$ 通り。

例えば 選んだ2種類がスペードとハートの時。カードの取り方は

(スペード, ハード)=(3枚, 1枚), (2枚, 2枚), (1枚, 3枚)

に限るので、

$${}_3C_3\cdot{}_3C_1+{}_3C_2\cdot{}_3C_2+{}_3C_1\cdot{}_3C_3=3+3\cdot3+3=15\text{通り}$$

よって、

$$P_1=\frac{6\cdot15}{11\cdot5\cdot9}=\frac{2}{11}$$

(2) 4種類から3種類を選ぶ。${}_4C_3=4$ 通り。

例えば 選んだ2種類がスペードとハートとダイヤの時。カードの取り方は

(スペード, ハード, ダイヤ)=(2枚, 1枚, 1枚), (1枚, 2枚, ・1枚), (1枚, 1枚, 2枚)

に限るので、

$${}_3C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1+{}_3C_1\cdot{}_3C_2\cdot{}_3C_1+{}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_2=3^3+3^3+3^3=81\text{通り}$$

よって、

$$P_2=\frac{4\cdot81}{11\cdot5\cdot9}=\frac{36}{55}$$

(3) スペードとハートとダイヤとクラブから1枚ずつ選べばよい。

$${}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1=3^4=81\text{通り}$$

よって、

$$P_3=\frac{81}{11\cdot5\cdot9}=\frac{9}{55}$$

(4) J, Q, Kのカードはそれぞれ4枚ずつある。全ての種類の取り方は

(J, Q, K)=(2枚, 1枚, 1枚), (1枚, 2枚, ・1枚), (1枚, 1枚, 2枚)

に限るので、

$${}_4C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1+{}_4C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_4C_1+{}_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_2=4^2\cdot6+4^2\cdot6+4^2\cdot6=3\cdot4^2\cdot6\text{通り}$$

よって、

$$P_4=\frac{3\cdot4^2\cdot6}{11\cdot5\cdot9}=\frac{32}{55}$$

(5) スペードとハートとダイヤとクラブに対して文字のパターンを考える。

J, J, Q, Kの並べ方は $\frac{4!}{2!}=12$ 通り　J, Q, Q, Kの並べ方は $\frac{4!}{2!}=12$ 通り

J, Q, K, Kの並べ方は $\frac{4!}{2!}=12$ 通り

よって、

$$P_5=\frac{3\cdot12}{11\cdot5\cdot9}=\frac{4}{55}$$