Windomの解答速報 日本大 N1 数学

I

(1)

【解答】

△ABDで余弦定理より

$BD^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos A$

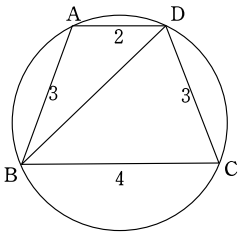
$=13-12\cos A$ …①

$\cos C=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

△BCDで余弦定理より

$BD^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos C$

$=25+24\cos A$ …②



①, ②より

$13-12\cos A=25+24\cos A \Leftrightarrow 36\cos A=-12 \Leftrightarrow \cos A=-\frac{1}{3}$

②に代入して

$BD^2=25+24\left(-\frac{1}{3}\right)=25-8=17$

$BD>0$ より $BD=\sqrt{17}$

(2)

【解答】

(前半)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より

$3=4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9$　　$2\vec{a}\cdot\vec{b}=3-4-9=-10$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$

(後半)

$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=t^2|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4t^2-10t+9=4\left(t^2-\frac{5}{2}t\right)+9$

$=4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{36}{4}=4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$

よって、$|t\vec{a}+\vec{b}|$ は $t=\frac{5}{4}$ の時最小値をとる。

(3)

【解答】

$y=x^2+ax+b$ のグラフが $x=2$ に関して対称なので、頂点の x 座標は2である。

頂点を$(2, q)$とおく。これが $y=3x-1$ 上なので

$q=3\cdot2-1=5$

よって、

$y=(x-2)^2+5=x^2-4x+9$

ゆえに、 $a=-4, b=9$。

(4)

【解答】

P(X, Y)とおく。

Pから $y=4$ に下ろした垂線の足を

H$(X, 4)$ とする。

$PH^2=OP^2$ より

$(4-Y)^2=X^2+Y^2$

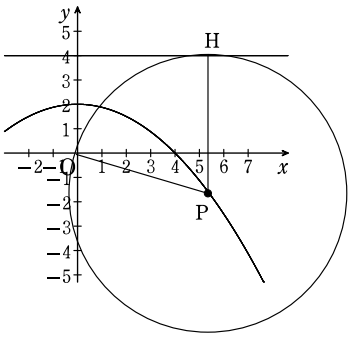
$16-8Y+Y^2=X^2+Y^2$

$8Y=-X^2+16$

$Y=-\frac{1}{8}X^2+2$

よって、Pの軌跡を表す式は

$y=-\frac{1}{8}x^2+2$



(5)

【解答】

$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

よって、

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12}=\frac{1}{2^6}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{64}$

II

【解答】

$t=2^x$ とおく

$f(x)=4^x-5\cdot2^{x+2}+64=2^{2x}-20\cdot2^z+64=t^2-20t+64=g(t)$

とおく。

(1)　$f(x)\leqq0$ より

$g(t)=t^2-20t+64\leqq0$　$(t-4)(t-16)\leqq0$　$4\leqq t\leqq16$　$2^2\leqq2^x\leqq2^4$

$2\leqq x\leqq4$

(2)　$f(x)=g(t)=t^2-20t+64=(t-10)^2-10^2+64=(t-10)^2-36$

$t>0$ より $t=10$の時最小となる。

$2^x=10$より $x=\log_2 10=\log_2(2\cdot5)=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5$

III

【解答】

(1)　$x^2+y^2-ax-by-c=0$ …①

とおく。$(2,5),(0,-1),(-2,1)$を①に代入して

$29-2a-5b-c=0 \Leftrightarrow 2a+5b+c=29$ … ②

$1+b-c=0 \Leftrightarrow -b+c=1$ … ③

$5+2a-b-c=0 \Leftrightarrow -2a+b+c=5$ … ④

②−③より　$2a+6b=28 \Leftrightarrow a+3b=14$ … ⑤

②−④より　$4a+4b=24 \Leftrightarrow a+b=6$ … ⑥

⑤−⑥より　$2b=8 \Leftrightarrow b=4$

⑥に代入して　$a+4=6 \Leftrightarrow a=2$

③に代入して　$-4+c=1 \Leftrightarrow c=5$

これらを①に代入して

$x^2+y^2-2x-4y-5=0$ … ⑦

(2)　$x^2+y^2-2x-4y-5=0$ より

$(x-1)^2+(y-2)^2=5+1^2+2^2=10$

よって、中心が$(1,2)$, 半径 $\sqrt{10}$ の円となる。

$(-1,6)$を通り傾き m の直線は

$y=m(x+1)+6$ … ⑧ $\Leftrightarrow mx-y+m+6=0$

この直線と円の中心との距離が半径となればよいので、点と直線の距離の公式より

$$\frac{|m\cdot 1-2+m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10} \Leftrightarrow |2m+4|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

両辺二乗して

$4m^2+16m+16=10m^2+10$　$6m^2-16m-6=0$　$3m^2-8m-3=0$

$(3m+1)(m-3)=0$　$m=-\frac{1}{3},3$

傾きの大きい方なので、 $m=3$ であり、⑧に代入して

$y=3(x+1)+6$　$y=3x+9$ … ⑨

(3)　⑨を⑦に代入して

$x^2+(3x+9)^2-2x-4(3x+9)-5=0$

$x^2+9x^2+54x+81-2x-12x-36-5=0$

$10x^2+40x+40=0$　$x^2+4x+4=0$　$(x+2)^2=0$　$x=-2$

⑨に代入して $y=-6+9=3$

よって、接点は$(-2,3)$ となる。

IV

【解答】

(1)　2点になるのは, 白2個または赤2個とる確率なので、

$$\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$$

(2)　A: 2点を得る　$P_A=\frac{2}{5}$　　B:1点を得る　$P_B=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3\cdot 2}{10}=\frac{3}{5}$

Aがa回, Bがb回の時, 得点は $X=2a+b$ である。

3回で5点になるのは

$$\begin{cases}a+b=3\\2a+b=5\end{cases} \text{より} \begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

の時である。A2回B1回の確率は

$$P_{2,1}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}{P_A}^2P_B=3\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}=\frac{2^2\cdot 3^2}{5^3}=\frac{36}{125}$$

(3)　7回で11点になるのは

$$\begin{cases}a+b=7\\2a+b=11\end{cases} \text{より} \begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$$

の時である。A4回B3回の確率は

$$P_{4,3}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}{P_A}^4{P_B}^3=35\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 7}{5^6}$$

3回目までの得点が5点のあと残り4回で11点になるのは

$$\begin{cases}a+b=4\\2a+b=11-5=6\end{cases} \text{より} \begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$$

の時である。A2回B2回の確率は

$$P_{2,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}{P_A}^2{P_B}^2=6\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2^3\cdot 3^3}{5^4}$$

X:7回繰り返したとき, 得点の合計が11点　Y:3回目までの得点が5点

とする。

$$P(X)=P_{4,3}=\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 7}{5^6}$$

$$P(X\cap Y)=P_{2,1}\cdot P_{2,2}=\frac{2^2\cdot 3^2}{5^3}\cdot\frac{2^3\cdot 3^3}{5^4}=\frac{2^5\cdot 3^5}{5^7}$$

よって、求める条件付き確率は

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{2^5\cdot 3^5}{5^7}}{\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 7}{5^6}}=\frac{2\cdot 3^2}{5\cdot 7}=\frac{18}{35}$$

V

【解答】

(1)　数列$\{a_n\}$の階差数列は $3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ なので、 $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=a+\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=a+6-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。 $n=1$ を代入すると $a+6-6=a$ となり $n=1$ の時も成り立つ。

(2)　a_n が等比数列になるのは $a+6=0$ 即ち $a=-6$ の時である。

このとき$a_n=-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$であるから、 $\sqrt{|a_n|}=\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ となる。よって、

$$\sum_{k=1}^{8}\sqrt{|a_k|}=\sum_{k=1}^{8}\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{\sqrt{6}\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{3}\left\{1-\frac{1}{16}\right\}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{15}{16}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{15\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{8}$$

VI

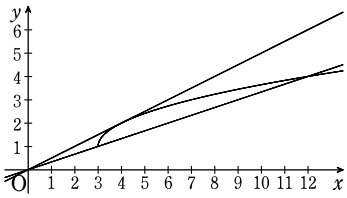
【解答】

(1)(前半)　$f(x)=\sqrt{x-3}+1$とおく。

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$ であり $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4-3}}=\dfrac{1}{2}$ となる。

(後半)

$y=f(x)$ と $y=ax$ の共有点が2点となるのは $y=ax$ が(3,1)を通るときから $y=f(x)$ と右図のように接する時までである。



[1]　$y=ax$が$(3,1)$を通る時

$1=3a \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$

[2]　$y=ax$ と $y=f(x)$ が接する時,$(t,f(t))$の接線が原点を通るときである。

$(t,f(t))$の接線は$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ であり、$(0,0)$を代入すると

$-f(t)=-tf'(t) \Leftrightarrow f(t)=tf'(t) \Leftrightarrow \sqrt{t-3}+1=\dfrac{t}{2\sqrt{t-3}}$

$\Leftrightarrow 2(t-3)+2\sqrt{t-3}=t \Leftrightarrow 2\sqrt{t-3}=6-t$

左辺$\geqq 0$より 右辺 $=6-t\geqq 0$ ゆえ $t\leqq 6$ … ①

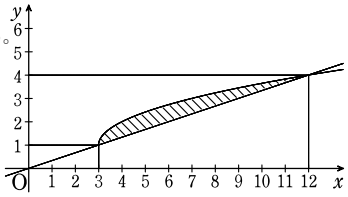
これに注意して二乗すると

$4(t-3)=36-12t+t^2$　　$t^2-16t+48=0$　　$(t-4)(t-12)=0$　　$t=4,12$

①より $t=4$。このとき,$a=f'(4)=\dfrac{1}{2}$ となる。

よって、求める条件は $\dfrac{1}{3}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ となる。

(2)　図形Dは右図の斜線部分である。



$\begin{cases} y=\sqrt{x-3}+1 \cdots ② \\ y=\dfrac{1}{3}x \cdots ③ \end{cases}$

を連立させる。

$\dfrac{1}{3}x=\sqrt{x-3}+1 \Leftrightarrow x-3=3\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x-3-3\sqrt{x-3}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}\{\sqrt{x-3}-3\}=0$

$\sqrt{x-3}=0$ を解くと $x=3$。③に代入して $y=\dfrac{3}{3}=1$。よって$(3,1)$となる。

$\sqrt{x-3}-3=0$ を解く。

$\sqrt{x-3}=3$　　$x-3=9$　　$x=12$

③に代入して $y=\dfrac{12}{3}=4$。よって$(12,4)$となる。

② $\Leftrightarrow y-1=\sqrt{x-3} \Leftrightarrow (y-1)^2=x-3 \Leftrightarrow x=(y-1)^2+3=g(y)$

③ $\Leftrightarrow x=3y=h(y)$

とおく。

(前半)　D の面積 S は

$S=\displaystyle\int_1^4(h(y)-g(y))dy=\int_1^4(3y-(y-1)^2-3)dy=-\int_1^4(y^2-5y+4)dy$

$=-\displaystyle\int_1^4(y-1)(y-4)dy=\frac{1}{6}(4-1)^3=\frac{9}{2}$

(後半)　D を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V は

$V=\pi\displaystyle\int_1^4(h(y)^2-g(y)^2)dy=\pi\int_1^4\{(3y)^2-((y-1)^2+3)^2\}dy$

$=\pi\displaystyle\int_1^4\{9y^2-(y-1)^4-6(y-1)^2-9\}dy$

$=\pi\left[3y^3-\dfrac{1}{5}(y-1)^5-2(y-1)^3-9y\right]_1^4$

$=\pi\left\{3(64-1)-\dfrac{1}{5}(3^5-0)-2(3^3-0)-9(4-1)\right\}$

$=\pi\left\{189-\dfrac{243}{5}-54-27\right\}=\pi\left\{108-\dfrac{243}{5}\right\}=\dfrac{540-243}{5}\pi=\dfrac{297}{5}\pi$