Windom　2018年3月3日昭和大II期(医学部)
解答速報　数学

$\boxed{1}$

平行四辺形OACBを考える。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。また, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=2$ とし,

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$のなす角は$60°$とする。

(1) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(2) s が実数全体を動くとき, $|\vec{a}+s\vec{b}|$が最小となるときの s の値を求めよ。
また, そのとき $(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の値を求めよ。

(3) すべての実数 t に対し $|t\vec{a}+k\vec{b}|\geqq|\vec{a}|$が成り立つような実数 k の範囲を求めよ。

(4) 平行四辺形OACBの面積を求めよ。

【答】

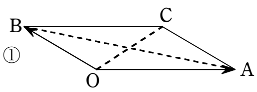
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$　$|\vec{a}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　$|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $s=1$　$(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=1$

(3) $k\leqq-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$, $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}\leqq k$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(解説)

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$ゆえ



$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=1 \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ …①

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}$ゆえ

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=4 \Leftrightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ …②

①−②より、$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-3 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$

①に代入すると、$|\vec{a}|^2-\dfrac{3}{2}+|\vec{b}|^2=1 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\dfrac{5}{2}$ …③

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos 60°=1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

$\Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=1$ …④

③+④より、$2|\vec{a}|^2=\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2=\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow |\vec{a}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

③−④より、$2|\vec{b}|^2=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow |\vec{b}|^2=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow |\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $|\vec{a}|^2=\dfrac{7}{4}$, $|\vec{b}|^2=\dfrac{3}{4}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ より

$$|\vec{a}+s\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2s\vec{a}\cdot\vec{b}+s^2|\vec{b}|^2=\frac{7}{4}+2s\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}s^2=\frac{3}{4}s^2-\frac{3}{2}s+\frac{7}{4}$$

$$=\frac{3}{4}(s-1)^2+1$$

$s=1$ の時、$|\vec{a}+s\vec{b}|$は最小となる。このとき、

$$(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=1$$

(3) $|t\vec{a}+k\vec{b}|\geqq|\vec{a}|>0$に注意する。

$|t\vec{a}+k\vec{b}|^2\geqq|\vec{a}|^2 \Leftrightarrow t^2|\vec{a}|^2+2tk\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\geqq 0$

$|\vec{a}|^2=\dfrac{7}{4}$, $|\vec{b}|^2=\dfrac{3}{4}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ より

$\dfrac{7}{4}t^2-\dfrac{3}{2}kt+\dfrac{3}{4}k^2-\dfrac{7}{4}\geqq 0 \Leftrightarrow 7t^2-6kt+3k^2-7\geqq 0$

これが任意の t に対して常に成り立つ条件は t の二次関数$y=7t^2-6kt+3k^2-7$のグラフが t 軸以上にあればよいので、判別式 $=D\leqq 0$ ならばよい。

$\dfrac{D}{4}=(3k^2)-7(3k^2-7)=-12k^2+49\leqq 0 \Leftrightarrow k^2\geqq\dfrac{49}{12} \Leftrightarrow |k|\geqq\dfrac{7}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

$\Leftrightarrow k\leqq-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$, $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}\leqq k$

(4) $|\vec{a}|^2=\dfrac{7}{4}$, $|\vec{b}|^2=\dfrac{3}{4}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ より

平行四辺形OACBの面積$=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$

$$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{21-9}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{2}$

(1) α および β が複素数であるとき, $\overline{\left(\dfrac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}$ を, α, β, $\overline{\alpha}$ ならびに $\overline{\beta}$ を用いてできるだけ簡単に表せ。

(2) $\alpha=\dfrac{2}{1-i}$, $\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ を計算過程に用いて, $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{5}{12}\pi$ および $\cos\dfrac{5}{12}\pi$の値を求めよ。ただし i は虚数単位とする。

(3) α, βが(2)のように与えられているとき, $\left\{\left(\dfrac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)\right\}^9$ の値を求めよ。
ただし, 必要ならば, i を虚数単位として用いよ。

【答】

(1) $\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}$

(2) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　$\sin\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3) i

(解説)

【解答】

(1) $\overline{\left(\dfrac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}=\dfrac{\overline{(\alpha\overline{\beta})}}{\overline{(\overline{\alpha}\beta)}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}$

(2) $\alpha=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\beta=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{1-i}\cdot\frac{\sqrt{3}-i}{4\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{3}-i)(1+i)}{4\sqrt{3}(1-i)(1+i)}=\frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{4\sqrt{3}} \cdots ①$$

極形式で計算すると

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \cdots ②$$

①と②の実部と虚部を比較して

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha\beta=\frac{2}{1-i}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=(1+i)\cdot\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)=(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i \cdots ③$$

極形式で計算すると

$$\alpha\beta=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right) \cdots ④$$

③と④の実部と虚部を比較して

$$2\sqrt{6}\cos\frac{5}{12}\pi=3-\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\frac{5}{12}\pi=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$2\sqrt{6}\sin\frac{5}{12}\pi=3+\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\frac{5}{12}\pi=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

【別解】

誘導を無視して加法定理でだしてよい。

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $$\overline{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}=\frac{\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}$$

$$=\cos\left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+i\sin\left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ド・モアブルの定理より

$$\left\{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)\right\}^9=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^9=\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=i$$

$\boxed{3}$

(1) $\begin{cases} 2^{x-1}+3^{y-1}=19 \\ 2^{x+2}-3^{y+2}=47 \end{cases}$ を解け。

(2) $(a+2b)(2b+3c)(3c+a)+6abc$ を因数分解せよ。

(3) 5人でじゃんけんをするとき，一度のじゃんけんで勝ちが 1 人決まる確率を求めよ。

ただし，各人がじゃんけんでグー，チョキ，パーを出す確率はすべて $\dfrac{1}{3}$ であるとする。

(4) a を実数とする。3辺の長さがそれぞれ $a-1,\ a,\ a+2$ となる三角形が鈍角三角形になる a の範囲を求めよ。

(5) 半径1の円に内接する正 n 角形の面積の $\dfrac{1}{n}$ を S_n とする。

このとき，S_{2018} を S_{1009} を用いて表せ。

【答】

(1) $x=5,\ y=2$ (2) $(a+2b+3c)(2ab+6bc+3ca)$ (3) $\dfrac{5}{81}$

(4) $3<a<3+2\sqrt{3}$ (5) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\sqrt{1-4{S_{1009}}^2}}$

(解説)

【解答】

(1) $X=2^x,\ Y=3^y$ とおく。

$2^{x-1}+3^{y-1}=19 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot 2^x+\dfrac{1}{3}\cdot 3^y=19 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}X+\dfrac{1}{3}Y=19$

$\Leftrightarrow 3X+2Y=114 \cdots ①$

$2^{x+2}-3^{y+2}=47 \Leftrightarrow 4\cdot 2^x-9\cdot 3^y=47 \Leftrightarrow 4X-9Y=47 \cdots ②$

①× 4 −②×3より、 $35Y=456-141=315 \Leftrightarrow Y=9 \cdots ③$

よって、 $3^y=9=3^2$ ゆえ $y=2$

③を①に代入して

$3X+2\cdot 9=114 \Leftrightarrow 3X=96 \Leftrightarrow X=32$

よって、 $2^x=32=2^5$ ゆえ $x=5$

(2) $A=a,\ B=2b,\ C=3c$ とおく。

$(a+2b)(2b+3c)(3c+a)+6abc=(A+B)(B+C)(C+A)+ABC$

$=(B+C)\{(A+B)(A+C)\}+ABC=(B+C)\{A^2+(B+C)A+BC\}+ABC$

$=(B+C)A^2+(B+C)^2A+(B+C)BC+ABC$

$=(B+C)A(A+B+C)+BC(A+B+C)$

$=(A+B+C)\{(B+C)A+BC\}=(A+B+C)(AB+BC+CA)$

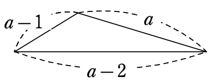
$=(a+2b+3c)(2ab+6bc+3ca)$

(3) 5人の手の出し方は 3^5 通り。

勝ち方は3通り、5人の中からの勝者の選び方は ${}_5C_1=5$ 通りなので、求める確率は

$P=\dfrac{3\cdot {}_5C_1}{3^5}=\dfrac{5}{3^4}=\dfrac{5}{81}$

(4) $a-1,\ a,\ a+2$ は全て正なので、 $a>1 \cdots ①$



$a+2>a>a-1$ に注意すると三角形の成立条件より

$a+2<a+(a-1)=2a-1 \Leftrightarrow a>3 \cdots ②$

$a+2$ が最長辺なので、鈍角三角形になる条件は

$(a+2)^2>a^2+(a-1)^2 \Leftrightarrow a^2+4a+4>2a^2-2a+1 \Leftrightarrow a^2-6a-3<0$

$a^2-6a-3=0$ を解くと $a=3\pm\sqrt{3^2-(-3)}=3\pm 2\sqrt{3}$ なので、二次不等式の解は

$3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3} \cdots ③$

①かつ②かつ③より、 $3<a<3+2\sqrt{3}$

(5) S_n は正 n 角形の中心を頂点とし、1辺を底辺とする三角形の面積と等しいので、

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

となる。 $\theta=\dfrac{\pi}{1009}$ とおくと

$$S_{2018}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2018}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{1009}=\frac{1}{2}\sin\theta\,,\quad S_{1009}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{1009}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

となる。半角の公式より、

$$S_{2018}=\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\cos 2\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\sqrt{1-4{S_{1009}}^2}}$$

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2 dx$ の値を求めよ。ただし, e は自然対数の底である。

(2) xの方程式 $e^{3x}=kx(3x+2)$ が実数解を1つもつように実数 k のとり得る範囲を定めよ。ただし, e は自然対数の底である。

(3) 関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t(t^2-1)|dt$ の最小値を求めよ。

【答】

(1) $\dfrac{1}{4}(e^2-1)$　　(2) $k=-\dfrac{3e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-2}$　$0<k<\dfrac{3e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+2}$　　(3) $\dfrac{7}{32}$

解説

【解答】

(1)

$$\int_1^e x(\log x)^2dx=\frac{1}{2}\Big[x^2(\log x)^2\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e x\log x\,dx=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\left\{\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2\right)-\left(0-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^2-1)$$

【参考】

$$\int x\log x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C$$

(2)

$e^{3x}=kx(3x+2)\cdots$①

(イ) $x=0$ の時。

①の左辺$=1$, ①の右辺$=0$となり①は不成立。よって $x=0$ は①の解ではない。

(ロ) $x=-\dfrac{2}{3}$ の時。

①の左辺$=e^{-2}$, ①の右辺$=0$となり①は不成立。よって $x=-\dfrac{2}{3}$ は①の解ではない。

(ハ) $x\neq 0,\ -\dfrac{2}{3}$ の時。

$$① \Leftrightarrow k=\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=f(x)$$

とおく。①の解の個数は $y=f(x)$と $y=k$ との交点の個数と一致する。

(i) 定義域。

分母$\neq0$より、$x\neq 0,\ -\dfrac{2}{3}$

(ii) $x\to\pm\infty$ と $x\to0\pm0$ と $x\to-\dfrac{2}{3}\pm0$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=0$$

$$\lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to0+0}\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=\infty \qquad \lim_{x\to0-0}f(x)=\lim_{x\to0-0}\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}+0}f(x)=\lim_{x\to0+0}\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=-\infty \qquad \lim_{x\to-\frac{2}{3}-0}f(x)=\lim_{x\to0-0}\frac{e^{3x}}{x(3x+2)}=\infty$$

(iii) $f'(x)$ について

$$f'(x)=\frac{3e^{3x}x(3x+2)-e^{3x}(6x+2)}{x^2(3x+2)^2}=\frac{e^{3x}(9x^2-2)}{x^2(3x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{2}{9} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の前後で $f'(x)$ は$+$から$-$に変わるので

$$極大値=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{e^{-\sqrt{2}}}{-\frac{\sqrt{2}}{3}(-\sqrt{2}+2)}=-\frac{3e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-2}$$

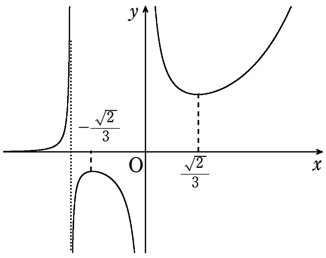
$x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の前後で $f'(x)$ は$-$から$+$に変わるので

$$極小値=f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{e^{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}+2)}=-\frac{3e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+2}$$

(iv) 増減表

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$(\infty,-\infty)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	$\searrow$	$(-\infty,\infty)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	$\nearrow$	(∞)

グラフは右図の通り。



$y=f(x)$ と $y=k$ の交点が1個になる条件は、

$$k=-\frac{3e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-2} \qquad 0<k<\frac{3e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+2}$$

(3)

(イ) $x\leqq-2$の時。

$$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t^2-1)|dt=\int_x^{x+1}(-t^3+t)dt$$

$$f'(x)=\{-(x+1)^3+(x+1)\}-(-x^3+x)=-3x^2-3x<0$$

(ロ) $-2\leqq x\leqq-1$の時

$$f(x)=\int_x^{-1}|t(t^2-1)|dt+\int_{-1}^{x+1}|t(t^2-1)|dt$$

$$=\int_x^{-1}(-t^3+t)dt+\int_{-1}^{x+1}(t^3-t)dt$$

$$f'(x)=-(-x^3+x)+\{(x+1)^3-(x+1)\}=2x^3+3x^2+x=x(2x+1)(x+1)\leqq0$$

等号成立は $x=-1$ に限る。

(ハ) $-1\leqq x\leqq0$の時

$$f(x)=\int_x^{0}|t(t^2-1)|dt+\int_{0}^{x+1}|t(t^2-1)|dt$$

$$=\int_x^{-1}(t^3-t)dt+\int_{-1}^{x+1}(-t^3+t)dt$$

$$f'(x)=(x^3-x)+\{-(x+1)^3+(x+1)\}=-2x^3-3x^2-x=-x(2x+1)(x+1)$$

$f'(x)=0$ を解くと、$x=-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0$ となる。

(ニ) $0\leqq x\leqq1$の時

$$f(x)=\int_x^{1}|t(t^2-1)|dt+\int_{1}^{x+1}|t(t^2-1)|dt$$

$$=\int_x^{1}(-t^3+t)dt+\int_{1}^{x+1}(t^3-t)dt$$

$$f'(x)=-(-x^3+x)+\{(x+1)^3-(x+1)\}=2x^3+3x^2+x=x(2x+1)(x+1)\geqq0$$

等号成立は $x=0$ に限る。

(ホ) $1\leqq x$の時。

$$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t^2-1)|dt=\int_x^{x+1}(t^3-t)dt$$

$$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)=3x^2+3x>0$$

以上より、$f(x)$ の増減表は以下の通り。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$\times$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$

増減表より $x=-\dfrac{1}{2}$ で極小かつ最小となる。

$$最小値=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|t(t^2-1)|dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t^2-1)|dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}(-t^3+t)dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=2\left(-\frac{1}{64}+\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{32}$$

$\boxed{5}$

【講評】

1　ベクトル。設定に注意して立式すれば難しくはない。

2　複素数平面。極形式を利用して計算する問題。三角比は知識か加法定理でよい。

3　小問集合。(4)は三角形の成立条件を忘れないように。(5)は半角の公式で攻略

4　小問集合　微分積分の計算は要領よく行うこと。

解説